Les exercices proposés ici sont des exercices ayant été donnés à des oraux de concours de diverses filières économiques.
Il s'agit de problèmes avec questions intermédiaires qui, chacun, porrait faire l'objet d'un exercice d'écrit.

Exercice $\boxed{1}$ **Enoncé :** Soit M une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $M^2 = 3M$

1. Justifier que M admet, au plus, deux valeurs propres réelles distinctes.
2. Démontrer que si M n'admet qu'une unique valeur propre réelle, alors M est diagonale.
3. On suppose dans cette question que le spectre de M, noté $sp(M)$, est de cardinal 2.
   (a) Démontrer que la matrice M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & m \\ 0 & 3 & p \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}$ où m, p et q sont trois réels.
   (b) Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres de M associés, respectivement, aux deux valeurs propres distinctes de M. On suppose que w est un troisième vecteur tel que la famille $(v_1\ ;\ v_2\ ;\ w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Quelles sont les valeurs possibles du triplet $(m\ ;\ p\ ;\ q)$?
   (c) Démontrer que M est diagonalisable
4. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{2}$ **Enoncé :**
On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0 \quad f(x) = \frac{|\ln x|}{1 + x^2}$$

On note ensuite $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

1. Etablir la convergence des deux intégrales (impropres) I et J.
2. Au moyen du changement de variables $t = \frac{1}{x}$, établir que les intégrales I et J sont égales.
3. Soit X, variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $]0; 1]$.
   (a) Rappeler l'espérance et la variance de X
   (b) On pose $Y = f(X)$. Démontrer que Y ainsi définie admet une espérance et une variance.
   (c) Justifier que l'espérance $E(Y)$ vaut I

Exercice $\boxed{3}$ **Enoncé :** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 + \frac{1}{2}\ln(x)$. On définit ensuite une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que les valeurs u_n de la suite sont bien définies dans $\mathbb{R}_+^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On définit la fonction φ sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\varphi(x) = f(x) - x$.
   (a) Dresser le tableau des variations de φ
   (b) Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β vérifiant : $0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [1; 2]$
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Etablir la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite l.
6. Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - 1| \leq \frac{3}{4}|u_n - 1|$$

   et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - 1| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

Exercice $\boxed{4}$ **Enoncé :**

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'encadrement $-nx \leq e^{-nx} - 1 \leq 0$ est vérifié.
2. Soit x un réel positif fixé. Démontrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{-nx}-1}{n}\, e^{-n}$ converge.

   Dans la suite, le réel $x \geq 0$ étant donné, on définira la suite $(S_n(x))_{n\geq 1}$ par :
$$\forall n \geq 1 \quad S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}-1}{k}\, e^{-k}$$
3. Etablir que, pour tout réel $x \geq 0$, la suite $(S_n(x))_{n\geq 1}$ converge vers un réel que l'on notera $S(x)$.
4. Si a et b désignent deux réels positifs avec $a \leq b$, déterminer les signes des quantités $S(a)$ ainsi que $S(a) - S(b)$.
5. On considère la fonction $S : x \mapsto S(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} S(x)$

Exercice $\boxed{5}$ **Enoncé :**

Soit E un espace vectoriel de dimension $n \geq 2$. On définit φ, un endomorphisme de E dont le rang $rg(\varphi)$ est un entier k.

1. Quelles sont les valeurs possibles de k ?
2. Si $k = 1$, quelle est alors la dimension du noyau de φ ?

   On suppose que $\mathcal{B} = (e_1 \,;\, \ldots \,;\, e_n)$ est une base de E dont les q premiers vecteurs sont des éléments de $ker(\varphi)$, et seulement ceux-là. le noyau de φ.
3. (a) Quelles sont ainsi les valeurs possibles de q ?
   (b) Si $k = 1$, combien vaut précisemment q ?
4. On suppose dans toute la suite que $k = 1$ effectivement.
   (a) Soit $A = (a_i)_{i\leq n}$ la matrice <u>colonne</u> des coordonnées de $\varphi(e_n)$ dans la base $\mathcal{B}$.
   Ecrire la matrice M de l'endomorphisme φ dans la base $\mathcal{B}$ au moyen des éléments $a_1, \ldots, a_n$
   (b) Exprimer le plus simplement possible M^2 et en déduire qu'il exitse un réel λ tel que $\varphi \circ \varphi = \lambda\varphi$
   (c) Justifier que φ est diagonalisable si, et seulement si, $\varphi \circ \varphi \neq O$ (endmorphisme nul de E).
5. La matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice $\boxed{6}$ **Enoncé :**

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega \,;\, \mathcal{A} \,;\, \mathbb{P})$ sur lequel on définit, pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, une famille $(X_1 \,;\, \ldots \,;\, X_n)$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant une même loi uniforme (finie) à valeurs dans $[\![0 \,;\, n]\!]$. On désignera par Y_n la variable aléatoire réelle qui, à toute issue $\omega \in \Omega$, renvoie le minimum des valeurs $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$.

1. Déterminer l'ensemble $Y_n(\Omega)$
2. Pour k entier naturel donné, déterminer les valeurs de $[Y_n > k]$ ainsi que $[Y_n \leq k]$
3. Déterminer la loi suivie par Y_n et décrire sa fonction de répartition.
4. Déterminer les espérances respectives de Y_1 et Y_2
5. Déterminer les variances respectives de Y_1 et Y_2
6. La suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

Exercice $\boxed{7}$ **Enoncé :** Soient N un entier naturel supérieur ou égal à deux et p un réel de l'intervalle $]0; 1[$.

On considère un groupe de N pièces toutes truquées de la même façon : elles renvoient *face* avec probabilité p. On réalise une expérience dans laquelle on lance, toutes ensembles, chacune des pièces n'étant pas encore tombée sur le côté *face*. Ainsi, au premier lancer, toutes les pièces sont jetées.

On désignera, pour n entier naturel non nul, par Y_n la variable aléatoire renvoyant le nombre exact de pièces étant tombées sur le côté *face* lors du n^{ieme} lancer. De plus, on notera X_n le nombre total de pièces étant tombées sur le côté *face* au plus tard lors du n^{ieme} lancer.

1. Justifier que l'on a $X_1 = Y_1$ puis déterminer les lois de X_1 et Y_1. On en donner l'espérance et la variance.
2. Déterminer, par le calcul, la probabilité p_k qu'une pièce donnée tombe sur *face* au plus tard lors du k^{ieme} lancer, k désignant un entier supérieur ou égal à 2.

   On pourra confondre p_1 et p dans la suite.
3. Dans cette question, on étudie le seul cas $k = 2$.
   (a) Justifier que X_2 suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N; p_2)$. On pourra admettre ce résultat pour la suite de l'exercice.
   (b) Ecrire une relation liant X_2, Y_1 et Y_2 et en déduire l'espérance de Y_2.
   (c) Déterminer la covariance de Y_1 et Y_2.
4. Déterminer, de façon générale, la loi de X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
5. Etudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires réelles $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Exercice $\boxed{8}$ Enoncé :

On définit trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \left\{ \begin{array}{lllll} u_{n+1} & = & \frac{7}{20}u_n & +\frac{1}{10}v_n & +\frac{1}{20}w_n \\ v_{n+1} & = & \frac{3}{20}u_n & +\frac{3}{10}v_n & +\frac{1}{20}w_n \\ w_{n+1} & = & \frac{9}{20}u_n & +\frac{3}{10}v_n & +\frac{7}{20}w_n \end{array} \right.$$

avec $u_0 = 1$ et $v_0 = 0$ et $w_0 = 0$.

On posera pour toute la suite $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $X_{n+1} = MX_n$.
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors $X_n = M^n X_0$.
3. Soient les matrices A et B définies comme :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & 1 \\ 9 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

   (a) Calculer expicitement les matrices $A + B$ ainsi que A^2 et B^2
   (b) Vérifier que $AB = BA = O_3$ (matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)
   (c) En déduire une expression simplifée de $(A + B)^n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
   (d) On pose $N = A+4I_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Vérifiez que $NB = 4B$ puis justifier l'existence de deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad N^n = a_n A + b_n B$$

   (e) Ecrire explicitement N^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4. A partir de l'étude précédante, justifier que $M = \dfrac{1}{20}N$ et expliciter les termes u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{9}$ Enoncé : On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t} \, \mathrm{d}t$$

1. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$
2. Déterminer la valeur de I_0.
3. Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Justifier alors que $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une réel que l'on notera L.
4. (a) Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de $I_n + I_{n+1}$ le plus simplement possible.
   (b) Justifier que l'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{2n+4} \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$$
   (c) En déduire une équivalent (simple) de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.
5. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur de :
   $$S_n = (-1)^n I_n \; - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$
   Qu'observe-t-on ?
6. Etablir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ et en donner la somme.

Exercice $\boxed{\textbf{10}}$ **Enoncé :**

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence (d'ordre 2) notée $(\mathcal{R})$ s'écrivant :

$$(\mathcal{R}) : \; \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \frac{4(n+1)}{2n+1} u_{n+1} - \frac{2n+3}{2n+1} u_n$$

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$, quelles sont alors les valeurs de u_2 et u_3 ?
   Dans la suite, F désignera l'ensemble des suites vérifiant la relation $(\mathcal{R})$.
2. Etablir que F est un espace vectoriel.
3. On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = n^2$. Vérifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.
   Etablir de même que la suite constante égale à 1 est dans F.
4. On définit l'application d sur F qui, étant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$, renvoie le couple $(u_0; u_1) \in \mathbb{R}^2$ formé des deux premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Démontrer que d est une application linéaire de F dans $\mathbb{R}^2$. Que vaut $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$?
5. Etablir que d est injective.
6. Justifier que d est surjective.
7. Déterminer la dimension de F puis en fournir une base.

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ **Enoncé :** Soit E un espace vectoriel de dimension 4. On définit φ, un endomorphisme de E vérifiant :

$$\forall x \in E \quad (\varphi \circ \varphi)(x) = -x$$

1. Justifier que φ est injective de E dans E.
2. En déduire que φ est un automorphisme de E.
3. On se donne $u \in E$ vecteur non nul. Justifier l'existence de $v \in E$ tel que $v \notin \mathrm{vect}(u; \varphi(u))$.
4. Démontrer que, u et v étant définis selon l'énoncé qui précède, on a que $\mathcal{B} = (u; \varphi(u); v; \varphi(v))$ est une base de E.
5. On donne une matrice A carrée d'ordre 4 vérifiant $A^2 = -I_4$ (matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).
   Etablir que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{12}$ **Enoncé :**

On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad u_n = \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} \quad ; \quad v_n = e^{u_n}$$

1. Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
2. Rappeler les développements limités à l'ordre 1 au voisinage de 0 des fonctions $x\mapsto\sqrt{1+x}$ et $x\mapsto e^x$
3. En déduire deux réels a et b tels que :
$$u_n = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
4. Expliciter alors une écriture similaire pour v_n et en déduire une équivalent de $v_n - e$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice $\boxed{13}$ **Enoncé :** On considère un jeu composé d'une grille, d'un dé usuel (cubique, aux faces numérotées, supposé non truqué) et de pions. La grille est munie de cases numérotées à l'aide d'entiers naturels. On imagine que l'on peut toujours, à loisir, agrandir le grille en ajoutant de nouvelles cases mais on ne placera jamais de case avant la case 0.

Initialement (on pourra considérer qu'il sagit du tour 0), le pion d'un joueur se situe en case 0. Ensuite, à chaque tour de jeu :

- Si le pion est en case 0, alors on le place en case 1 pour le tour suivant
- Sinon, le joueur lance un dé et, sur obtention d'un score supérieur ou égal à 4 sur le dé, le pion est placé sur la case portant le numéro suivant, pour le tour suivant ; sur un autre score du dé, le joueur recule son pion sur la case précédante pour le tour suivant.

Ainsi, par exemple, si le pion du joueur est situé en case 3 au début du tour 7 et qu'en lançant un dé, le joueur obtient 5, alors pour le début du tour 8, le pion sera plaçé en case 4.

L'entier n étant donné, on désignera par C_n le numéro de la case où se situe le pion au début du tour n. De plus, on définit X_n comme le nombre de déplacements effectués par le pion lorsqu'il atteint, pour la première fois, la case n.

1. La variable aléatoire C_0 est certaine : expliquez-en la signification. Qu'en est-il pour X_0 ?
2. Déterminer les lois respectives de C_1 et X_1.
3. Justfier que X_2 renvoie toujours des valeurs paires.
4. Calculer l'espérance et la variance de X_2, en justifiant de leur existence.
5. Déterminer le support $X_n(\Omega)$ de la variable aléatoire X_n en fonction de $n\in\mathbb{N}$
6. Calculer $\mathbb{P}[X_n = n]$ en fonction de n
7. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}[X_n = n]$
8. Peut-on dire que (X_n) converge en probabilité avec une variable aléatoire Z ? Justifier.

Exercice $\boxed{14}$ **Enoncé :** On considère l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \geq 2$ est un entier naturel et, pour toute matrice A carrée d'ordre $n\geq 2$, on définit sur E l'application :

$$f_A : X \mapsto AX - XA$$

On désignera par I_n la matrice identité de taille n.

1. Vérifier que f_A est bien une application linéaire de E dans E.
2. Etablir que, quelle que soit la matrice A considérée, l'application f_A n'est pas injective.
3. Dans cette question, $n = 2$
   (a) Déterminer le noyau et l'image de f_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
   (b) Démontrer que f_{I_2} est l'application nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, I_2 désignant la matrice identité de taille 2.
   (c) Déterminer toutes les matrices M telles que $f_M = O$ (endomorphisme nul)
4. On revient au cas général

(a) Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, si $M = \lambda I_n$ alors $f_M = O$ (endomorphisme nul de E).
(b) Etablir que, quel que soit $n \geq 3$, il existe une matrice $A \in E$ telle que f_A ne soit pas l'endomorphisme nul.
(c) Soit P un polynôme donné. Démontrer que, si $A \in E$ alors $f_A(P(A)) = O_n$ (matrice nulle de E).
(d) On se donne la matrice A, diagonale, vérifiant :

$$\forall i \leq n \quad a_{ii} = i$$

Démontrer que le noyau de f_A est de dimension n. En déduire la dimension de $im(f_A)$

Exercice $\boxed{15}$ Enoncé :

Soient les matrices A et B définies comme :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 6 & -4 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer explicitement les matrices $A + B$ ainsi que A^2 et B^2
2. Les matrices A et B commutent-elles, c'est-à-dire, les produits AB et BA sont-ils égaux ?
3. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $(A + B)^n = A^n + B^n$.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ?
5. On considère à présent trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n - b_n - c_n \quad ; \quad b_{n+1} = 3a_n - 2b_n - \frac{7}{2}c_n \quad ; \quad c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n$$

On notera $\alpha = a_0$, $\beta = b_0$ et $\gamma = c_0$.
En vous aidant des questions précédentes, déterminer une expression explicite de chacun des termes généraux a_n, b_n et c_n fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi que α, β et γ.

Exercice $\boxed{16}$ Enoncé :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 + \frac{1}{4}\ln(x)$. On définit ensuite une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par : $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Déterminer u_1
2. On définit la fonction h sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = f(x) - x$.
   (a) Dresser le tableau des variations de h
   (b) Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β vérifiant : $0 < \alpha < \frac{1}{4} < \beta$.
3. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \in [2; 4]$
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Etablir la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et justifier que sa limite est le réel β.
6. Démontrer qu'il existe un réel $q \in]0; 1[$ vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_{n+1} - \beta| \leq q|u_n - \beta|$$

et en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n - \beta| \leq 4q^n$$

Exercice $\boxed{17}$ Enoncé :

On définit la fonction f sur $]-1; 1[$ par :

$$\forall x \in]-1; 1[\quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

On note ensuite $I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ et $J = \displaystyle\int_{-1}^0 f(x)\,dx$

1. Etablir la convergence des deux intégrales (impropres) I et J.
2. Justifier que l'on a $I = J$.
3. Soit X, variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $[0;1[$.
   (a) Rappeler l'espérance et la variance de X
   (b) On pose $Z = f(X)$. Déterminer si Z ainsi définie admet une espérance et une variance.
   (c) Justifier que l'espérance $E(Z)$ vaut I

Exercice $\boxed{18}$ **Enoncé :**

1. Soit x un réel positif fixé. Démontrer que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n\left(e^{-nx}-1\right)\ e^{-n}$ converge.

   Dans la suite, le réel $x \geq 0$ étant donné, on définira la suite $(T_n(x))_{n\geq 0}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad T_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\left(e^{-kx}-1\right)\ e^{-k}$$

2. Etablir que, pour tout réel $x \geq 0$, la suite $(T_n(x))_{n\geq 0}$ converge vers un réel que l'on notera $T(x)$.
3. Si x et y désignent deux réels positifs avec $x \leq y$, déterminer les signes des quantités $T(x)$ ainsi que $T(x) - T(y)$.
4. On considère la fonction $S : x \mapsto T(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer la valeur de $\lim\limits_{x\to 0^+} T(x)$

Exercice $\boxed{19}$ **Enoncé :**

Soit $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des vecteurs colonnes de $n \geq 2$ lignes à coefficients réels. On définit V, vecteur non nul de E.

1. On pose $M = V \cdot^t V$; vérifier que M est une matrice carrée d'ordre n
2. Déterminer le rang de M.
3. Démontrer que l'on peut choisir $n-1$ vecteurs $C_1, \ldots ; C_{n-1}$ de E tels que $\mathcal{B} = (C_1\ ;\ \ldots\ ;\ C_{n-1}\ ;\ V)$ soit une base de E.
4. On définit maintenant l'endomorphisme φ de E dont M est la matrice dans la base canonique de E.
   (a) Quelle est la dimension du noyau de φ ? De son image ?
   (b) Vérifier que l'on peut construire la base $\mathcal{B}$ décrite plus haut en choisissant $C_1, \ldots ; C_{n-1}$ dans le noyau de φ.

   On supposera dans la suite que la base $\mathcal{B}$ a été ainsi construite.
5. Décrire la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$.
6. Exprimer le plus simplement possible A^2 et en déduire qu'il existe un réel a tel que $\varphi \circ \varphi\ =\ a\varphi$
7. Justifier que φ est diagonalisable si, et seulement si, $\varphi \circ \varphi \neq O$ (endmorphisme nul de E).
8. La matrice $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice $\boxed{20}$ **Enoncé :**

Pour n entier naturel non nul donné, on définit $X_1\ ;\ \ldots\ ;\ X_n$ des variables aléatoires réelles d'un même espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. On supposera dans tout cet exercice que ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes et suivent une même loi uniforme (finie) à valeurs dans $[\![-n\ ;\ n]\!]$. On définit enfin $D_n = \min(X_1\ ;\ \ldots\ ;\ X_n)$.

1. Déterminer l'ensemble $D_n(\Omega)$
2. Quelle est la loi de D_1 ? Déterminer l'espérance et la variance de D_1.
3. Déterminer l'espérance et la variance de D_2.

4. Pour k entier naturel donné, déterminer les valeurs de $[D_n \leq k]$ ainsi que $[D_n > k]$.
5. Déterminer la loi suivie par D_n
6. Décrire la fonction de répartition F_{D_n} de D_n
7. La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle en loi ?

Exercice $\boxed{21}$ **Enoncé :** Soient $N \geq 2$, entier naturel et $p \in]0;1[$ fixés.

On considère un ensemble de N dés tous truquées de façon identique : ils tombent sur la face *un* -désignée par l'appellation “as" dans la suite- avec probabilité p. On réalise une expérience dans laquelle on lance une première fois tous les dés, puis on relance chacun des dés n'étant pas encore tombé sur l'as jusqu'à épuisement.

Ainsi, un dé cesse d'être lancé si, et seulement si, il est tombé exactement une fois sur la face dite “as". L'épuisement a lieu dès lors que chaque dé est tombé exactement une fois sur “as".

On désignera, pour n entier naturel non nul, par T_n la variable aléatoire renvoyant le nombre exact de dés ayant réalisé un as lors du n^{ieme} lancer. De plus, on notera X_n le nombre total de dés ayant réalisé un as au plus tard lors du n^{ieme} lancer.

1. Déterminer la loi de X_1 puis indiquer son espérance et sa variance. Quel lien établir entre X_1 et T_1 ?
2. Déterminer la probabilité p_n qu'un dé donné réalise un as au plus tard lors du n^{ieme} lancer si $n \geq 2$.
3. Dans cette question, on étudie le seul cas $n = 2$.
   (a) Justifier que X_2 suit une loi binomiale $\mathcal{B}(N; p_2)$. On pourra admettre ce résultat pour la suite de l'exercice.
   (b) Ecrire une relation liant X_2, T_1 et T_2 et en déduire l'espérance de T_2.
   Comparer, si possible, ce résultat avec les simulations réalisées.
   (c) Déterminer la covariance de T_1 et T_2.
4. Déterminer, de façon générale, la loi de X_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$
5. Proposer une conjecture sur le comportement asymptotique de T_n lorsque n tend vers $+\infty$?

Exercice $\boxed{22}$ **Enoncé :**

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ et on désignera par I l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$

1. Etablir que l'intégrale I est convergente et justifier que l'on a :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$
2. Justifier qu'il existe une unique constante $c > 0$ telle que $f : x \mapsto c \cdot h(x)$ soit la densité de probabilité d'une variable aléatoire réelle X.
   Dans la suite, on considèrera X une telle variable aléatoire, définie sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. La notation c continuera de désigner la constante définie ci-dessus.
3. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.
4. Démontrer que X n'admet pas d'espérance. Admet-elle une variance ?
5. On cherche maintenant à estimer la valeur de $p = \mathbb{P}[0 \leq X \leq 1]$
   On définit pour cela la suite $(T_n)_{n\geq 1}$ par :
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$
   et on posera $S_n = T_n + \frac{1}{2n}$ pour $n \geq 1$.
   (a) Encadrer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 h(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide des suites T_n et S_n.
   (b) Démontrer que les suites $(T_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ convergent vers une même limite que l'on déterminera.

Exercice $\boxed{23}$ **Enoncé :**

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

avec convention $t^0 = 1$ pour $t \in [0;1]$.

1. Déterminer les valeurs de I_0 et I_1
2. Etudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ?
4. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$$
   (b) Proposer un encadrement de I_n puis établir que l'on a :
$$I_n \sim \frac{1}{2n}$$
   lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Que dire de $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$?
5. Démontrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$(-1)^n I_n = I_0 \ + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$
6. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice $\boxed{24}$ **Enoncé :** Soit E un espace vectoriel de dimension n pair. On définit f, un endomorphisme de E satisfaisant la relation $f^2 + Id_E = O$ où O désigne l'endomorphisme nul de E.

1. Démontrer que l'on a :
$$\forall x \in E \quad x \neq 0_E \ \Rightarrow \ f(x) \neq 0_E$$
   Que peut-on alors dire de f ?
2. Etablir que f est un automorphisme de E.
   Dans la suite, on se donne $u \in E$ vecteur non nul
3. On suppose dans cette question seulement que $n = 2$. Etablir que la famille $(u; f(u))$ est une base de E.
4. On suppose maintenant que $n > 2$. Etablir qu'il existe un vecteur v de E n'étant pas combinaison linéaire de u et $f(u)$.
   Que dire alors de la famille $\mathcal{B} = (u; f(u); v; f(v))$ en toute généralité ?
5. On donne une matrice A carrée d'ordre 4 vérifiant $A^2 = -I_4$ (matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).
   Etablir que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{25}$ **Enoncé :** On définit l'ensemble F des suite réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (2n+3)x_n - 4(n+1)x_{n+1} + (2n+1)x_{n+2} = 0$$

1. Si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $x_0 = -1$ et $x_1 = 2$, quelles sont alors les valeurs de x_2 et x_3 ?
2. Etablir que F est un espace vectoriel.
3. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 1$. Vérifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$.

4. Vérifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des carrés parfaits est aussi dans F (on a donc $v_n = n^2$)
5. On définit une application f sur F par : $f((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (x_0; x_1)$
   Etablir que f est une application linéaire de F dans un espace vectoriel E que l'on identifiera.
6. Déterminer le noyau de f ainsi que son image $im(f)$.
7. En déduire que f est un isomorphisme.
8. Déterminer la dimension de F puis en fournir une base.

Exercice $\boxed{26}$ **Enoncé :** On définit deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{-\frac{1}{2}} \quad ; \quad v_n = e^{u_n}$$

1. Exprimer le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
2. Déterminer les limites des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\sqrt{1+\frac{1}{n}} = a + \frac{b}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$
   et en déduire un équivalent à l'infini de $u_n - 1$.
4. Conjecturer un équivalent à l'infini de $(v_n - e)$
5. Déterminer le réel l tel que :
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{e}(v_n - e) = l$$
   puis confrontez ce résultat avec votre conjecture.

Exercice $\boxed{27}$ **Enoncé :** On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$ et on désignera par I l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$

1. Etablir que l'intégrale I est convergente.
2. Démontrer qu'il existe une constante $c > 0$ réelle telle que :
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = 1$$
3. On cherche maintenant à estimer la valeur de c.
   (a) Comparer les valeurs de S_n et $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$ pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $S_n - 1 \leq \displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$
   (c) L'entier $n \geq 2$ étant fixé, on note $x_k = \dfrac{k}{n}$ pour k entier entre 0 et n^2 et on écrit $h_k = f(x_k)$.
   Justifier que l'on a :
$$\sum_{k=1}^{n^2} \frac{h_k}{n} \leq \int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$$
   (d) A l'aide des valeurs h_k, proposer un encadrement de $\displaystyle\int_0^n f(t)\,\mathrm{d}t$
   (e) Démontrer que la suite des valeurs $\displaystyle\sum_{k=1}^{n^2} \frac{h_k}{n}$ admet I pour limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice $\boxed{28}$ **Enoncé :** On considère un singulier personnage qui décide d'effectuer une balade un peu étrange le long d'un sentier balisé. Les balises portent des numéros entiers, en commençant par la balise 0 et en progressant de un en un. On supposera, pour les besoins théoriques, que l'on peut toujours considérer la balise numéro k et ce, pour tout entier k aussi grand soit-il.

Pour effectuer sa balade, notre personnage débute en balise 0 et progresse toujours d'une balise à une autre en exactement une minute, sans jamais sauter de balise. Lorsqu'il se situe à une certaine balise, il sélectionne au hasard la prochaine balise vers laquelle il se dirigera pendant la minute qui suit.

On désignera par B_n le numéro de la balise à laquelle se situera notre personnage au bout de n minutes écoulées. On pourra donc considérer que $B_0 = 0$.

On admet que l'on peut ainsi construire un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ sur lequel on travaillera effectivement pour modéliser la situation.

1. Expliquer l'égalité $\mathbb{P}_{[B_n=0]}([B_{n+1} = 1]) = 1$ pour tout entier naturel n. On pourra admettre ce résultat pour la suite.
2. Déterminer la loi de B_1. En calculer l'espérance et la variance.
3. Décrire l'ensemble des valeurs de $B_n(\Omega)$, en fonction de $n \in \mathbb{N}$. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}([B_n = n])$? Justifier
4. On définit à présent une variable aléatoire X qui donne le nombre de minutes écoulées lorsque notre personnage atteint pour la première fois la balise 2
   (a) Déterminer l'ensemble des valeurs $X(\Omega)$.
   (b) Calculer l'espérance et la variance de X, en justifiant de leur existence.
   (c) Soit $(X_1 \dots X_n)$ un n-échantillon de X. On définit la suite (S_n) par $S_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$
   Quelle interprétation peut-on donner à la valeur S_{100} ?
   (d) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, S_n admet une espérance et la déterminer.

Exercice $\boxed{29}$ **Enoncé :**

Soit $n \geq 2$ un entier naturel supposé donné. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on pose $f_A(M) = MA - AM$ où $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on désignera par I_n la matrice identité de taille n et on pourra noter E l'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Vérifier que f_A ainsi défini est un endomorphisme de E.
2. Etablir que, quelle que soit la matrice A considérée, l'application f_A n'est pas injective.
3. Dans cette question, $n = 2$
   (a) Déterminer le noyau et l'image de f_A lorsque $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
   (b) Démontrer que f_{I_2} est l'application nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, I_2 désignant la matrice identité de taille 2.
   (c) Déterminer toutes les matrices M telles que $f_M = O$ (endomorphisme nul)
4. On revient au cas général
   (a) On définit K_{ij} comme la matrice de E dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de i^{eme} ligne et j^{eme} colonne qui vaut 1.
   Déterminer alors l'application $f_{K_{ij}}$ en fonction des entiers i et j compris entre 1 et n.
   (b) Etablir que, quel que soit $n \geq 3$, il existe une matrice $A \in E$ telle que f_A soit l'endomorphisme nul.
   (c) Soit P un polynôme donné. Démontrer que, si $A \in E$ alors $f_A(P(A)) = O_n$ (matrice nulle de E).
   (d) On se donne la matrice D, diagonale, vérifiant :
   $$\forall i \leq n \quad d_{ii} = n - i$$
   Démontrer que le noyau de f_D est de dimension n. En déduire la dimension de $im(f_D)$

Exercice $\boxed{30}$ **Enoncé :**

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels vérifiant $M^2 = -M$

1. Quelles sont les valeurs propres possibles pour M à partir de ces données ?
2. Démontrer que si M n'admet qu'une unique valeur propre réelle λ, alors $M = \lambda \cdot I_3$.
3. On suppose dans cette question que M possède exactement deux valeurs propres distinctes $\lambda_1 < \lambda_2$
   (a) Démontrer que la matrice M est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & -1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ où a, b et c sont trois réels.
   (b) Soient v_1 et v_2 deux vecteurs propres de M associés, respectivement, aux deux valeurs propres distinctes de M. On suppose que w est un troisième vecteur tel que la famille $(v_1\ ;\ v_2\ ;\ w)$ forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Quelles sont les valeurs possibles du triplet $(a\ ;\ b\ ;\ c)$?
   (c) Démontrer que M est diagonalisable
4. Diagonaliser la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{31}$ **Enoncé :**

On définit, pour tout $t \in \mathbb{R}$ une matrice $M(t)$ par $M(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 1 \\ 1 & 1+t^2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des valeurs de t pour lesquelles $M(t)$ est symétrique.
2. Pour quelle(s) valeur(s) de $t \in \mathbb{R}$ a-t-on 0 valeur propre de $M(t)$?
3. Soit $t \in \mathbb{R}$ donné. On définit une application Ψ_t sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par :

$$\Psi_t(X) = XM(t) + M(t)X$$

   (a) Démontrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, Ψ_t est un endomorphisme $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer l'ensemble des valeurs de t, réel, pour lesquelles on a Ψ_t injectif.
   (c) Peut-on rendre Ψ_t bijective de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
   (d) On désigne par E_{ij} la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ ayant pour coefficient 1 en ligne i et colonne j, et 0 partout ailleurs.
   Vérifier que $\mathcal{B} = (E_{11}; E_{12}; E_{21}; E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice représentative de l'endomorphisme Ψ_t dans la base $\mathcal{B}$.
   (e) Résoudre l'équation $M(t)X + XM(t) = I_2$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice $\boxed{32}$ **Enoncé :**

On dispose d'une urne contenant des boules bleues, rouges et vertes au nombre total de six, sans connaître le nombre spécifique de boules d'une couleur donnée. On fixe $n \geq 1$, un entier naturel.

On procède à exactement n tirages successifs depuis cette urne, indépendamment et avec remise de la boule piochée à chaque fois.

On notera p la probabilité d'obtention, pour un tirage donné, d'une boule bleue, puis q la probabilité d'obtention, pour un tirage donné, d'une boule rouge et on remarquera enfin que $1 - p - q$ est ainsi la probabilité d'obtention d'une boule verte depuis cette urne.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules bleues (resp. boules rouges) obtenues en n tirages successifs.

1. Quelles sont les lois respectives suivies par, respectivement, X et Y ?
2. Déterminer la loi du couple $(X; Y)$.
3. Peut-on dire que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes ?
4. On définit $U_n = \frac{1}{n+1}X$ pour $n \geq 1$, comme estimateur du paramètre p.
   (a) Déterminer le biais de l'estimateur U_n
   (b) Calculer le risque quadratique de U_n

5. On suppose à présent que le nombre N de lancers est une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\mu > 0$
   (a) Si X et Y désignent encore le nombre de boules respectivement bleues et rouges obtenues en N tirages, successifs et avec remise, quelles sont leurs lois (respectivement) ?
   (b) Déterminer si X et Y sont indépendantes dans ce nouveau contexte.

Exercice $\boxed{33}$ **Enoncé :** Pour f fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$ on définit :

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Pour f définie sur $[0;1]$ par $f(t) = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, calculer $L(f)$
2. Soit $h : t \mapsto \frac{1}{2}\ln\left(2t + \sqrt{1+4t^2}\right)$ définie sur $[0;1]$.
   (a) Vérifier que h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0;1]$ et calculer $h'(t)$ avec $t \in [0;1]$
   (b) La fonction carrée définie sur $[0;1]$ étant notée c, déterminer $L(c)$.
3. Soit p une fonction polynômiale de degré 2 définie sur $[0;1]$ s'écrivant : $p(x) = ax^2 + bx + c$
   Déterminer, en fonction de a, b et de c une expression de $L(p)$
4. On se donne $x \geq 1$ un réel et f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) On note f_x la fonction définie sur $[1;x]$ et qui coïncide avec f sur cet intervalle.
   Déterminer les variations de la fonction $x \mapsto L(f_x)$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} L(f_x)$
5. Dresser le tableau des variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$\varphi : x \mapsto \int_0^x \sqrt{1 + \frac{1}{(1+t)^2}}\mathrm{d}t$$

Exercice $\boxed{34}$ **Enoncé :**

Soit X qui suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit un polynôme P par :

$$P(t) = t^2 - 2Xt + X$$

On notera $\mathcal{C}_X$ sa parabole représentative en repère orthonormé.

1. Si P admet des racines réelles, exprimer, en fonction de X, ces racines.
2. Déterminer la probabilité p_λ que le polynôme P admette exactement deux racines réelles.
3. Calculer la probabilité que le sommet de la parabole représentative de P soit situé sous l'axe des abscisses.
4. Déterminer l'altitude Y espérée du sommet de $\mathcal{C}_X$
5. Peut-on choisir $\lambda > 0$ pour que la probabilité d'obtenir pour sommet S de $\mathcal{C}_X$ un point ayant même abscisse qu'ordonnée dépasse $\frac{1}{2}$?

Exercice $\boxed{35}$ **Enoncé :**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad f(x;y) = x^4 + y^4 - 4xy + 2$$

1. Etudier les extrema locaux de f
2. La fonction f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$?
3. On considère la fonction partielle $\varphi_y(x) = f(x;y)$ définie pour $x \in \mathbb{R}$, le paramètre y étant fixé.

   (a) Démontrer que, pour tout $y \in \mathbb{R}$ la fonction φ_y admet un minimum global et local sur $\mathbb{R}$ en un point que l'on déterminera (en fonction de y)
   (b) Dresser le tableau des variations de φ_y sur $\mathbb{R}$
   (c) Vérifier que la valeur du minimum de φ_y est $m(y) = y^4 - 3y^{4/3} + 2$
   (d) Etudier le nombre de solutions de l'équation $m(y) = 0$ en fonction de $y \in \mathbb{R}$.
4. En vous inspirant de la démarche précédante, déterminer la valeur de $p(x)$, minimum de la fonction partielle définie comme $\psi_x : y \mapsto f(x; y)$

Exercice $\boxed{36}$ **Enoncé :**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une application tr par :

$$tr : M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \\ m_{n1} & & \dots & m_{nn} \end{pmatrix} \mapsto \sum_{k=1}^{n} m_{kk}$$

1. Démontrer que tr est linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
2. Dans cette partie, on se place dans le cas où $n = 2$ et on désigne par A une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
   (a) De façon générale, si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ expliciter la valeur de $tr(A)$
   (b) Démontrer que la matrice $A^2 - tr(A) \cdot A$ est toujours diagonale.
   (c) Justifier que, pour tout entier naturel n, il existe deux réels α_n et β_n vérifiant :
   $$A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$$
   On se place de nouveau dans le cas général :
3. Démontrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ on a $tr\left({}^tAA\right) \geq 0$
4. Justifier que l'ensemble $\mathcal{K}$ des matrices $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $tr(M) = 0$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
5. Déterminer la dimension de $\mathcal{K}$ puis en proposer une base
   indication : La base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est composée de matrices E_{ij} ayant exactement un coefficient égal à 1, situé en ligne i et colonne j, tous les autres coefficients étant nuls.

Exercice $\boxed{37}$ **Enoncé :**

On considère E l'ensemble des applications f de $I = [0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et vérifiant $f(0) = f(1) = 0$

1. Vérifier que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des applications de l'intervalle I dans $\mathbb{R}$.
2. Déterminer l'ensemble P des polynômes de degré au plus deux, éléments de E.
3. On définit sur E une application L par :
$$L(f) : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x \in]0; 1] \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
   (a) Démontrer qu'en prenant $a = f'(0)$ l'application $L(f)$ est continue sur $I = [0; 1]$.
   On conservera cette valeur de a dans la suite.
   (b) Justifier que $L(f)$ est dérivable en 0. On pourra exploiter la formule de Taylor-Young.
   (c) L'application L ainsi définie, est-elle un endormorphisme de E ?
4. Démontrer que, pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, la fonction $x \mapsto x(x-1)f(x)$ est un élément de E

5. On note F l'espace vectoriel des applications engendré par $h_1 : x \mapsto x^2 - x$, $h_2 : x \mapsto x^3 - x^2$ et $h_3 : x \mapsto x^4 - x^3$. Démontrer que $(h_1; h_2; h_3)$ est bien une base de F puis déterminer sa dimension.
6. Exprimer de manière générale, pour tout $h \in F$, l'image $L(h)$.

Exercice $\boxed{38}$ **Enoncé :**

On dispose d'un dé à 6 faces portant chacune des numéros parmi 1, 2 ou 3 uniquement. Le nombre de faces numérotées 1 est a, le nombre de faces numérotées 2 est b de sorte que le nombre de faces numérotées 3 est $6 - (a + b)$. Le dé en lui-même est supposé équilibré et chaque numéro apparaît au moins une fois.

On procède à exactement n lancers successifs de ce dé, indépendamment.

Soit X (resp. Y) la variable aléatoire réelle égale au nombre de faces 1 (resp. faces 2) obtenues en n tirages successifs.

1. Exprimer la probabilité p d'obtenir une face 1 en lançant une fois ce dé, en fonction de a et de b. Exprimer pareillement la probabilité q d'obtenir une face 2 en lançant exactement une fois ce dé.
2. Si Z désigne la variable aléatoire réelle égale au nombre de faces 3 obtenues en n tirages successifs, quelle est la loi de $X + Y + Z$?
3. Quelles sont les lois respectives suivies par, respectivement, X et Y ?
4. Déterminer la loi du couple $(X; Y)$.
5. Peut-on dire que les variables aléaoires X et Y sont indépendantes ?
6. On définit $A_n = \frac{6}{n+1}X$ pour $n \geq 1$, comme estimateur du paramètre a.
   (a) Déterminer le biais de l'estimateur A_n
   (b) Calculer le risque quadratique de A_n

Exercice $\boxed{39}$ **Enoncé :**

On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x e^{-t^2/2}\mathrm{d}t$$

1. Justifier que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$
2. Etudier les variations de F sur $\mathbb{R}$
3. Démontrer que F admet une limite réelle l en $+\infty$ et la déterminer.
   Indication : On pourra considérer une variable aléatoire X de loi Normale centrée-réduite.
4. Dresser le tableau des variations de F sur $\mathbb{R}$
5. Vérifier que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I à préciser.
6. Démontrer que l'application réciproque $G = F^{-1}$ est dérivable sur I et calculer $G'(0)$

Exercice $\boxed{40}$ **Enoncé :**

On considère f une fonction dérivable sur $[0; 1]$ et φ, définie sur $[0; 1]$ par :

$$\varphi(x) = \int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$$

1. Montrer que φ est continue et dérivable sur $[0; 1]$.
2. On note φ' la dérivée de φ, déterminer une expression de $\varphi'(x)$.
3. On définit maintenant la fonction f par :

$$\forall x \in [0; 1] \qquad f(x) = 1 - e^{-x^2}$$

   (a) Vérifier que f est dérivable sur $[0; 1]$.
   (b) Décrire la fonction φ associée à f selon les notations introduites.
   (c) Peut-on choisir c, constante réelle, de sorte que $c \cdot \varphi$ soit une densité de probabilités ?

4. On définit cette fois la fonction f sur $[0;1]$ par :

$$\forall x \in]0;1] \quad f(x) = x^2 \ln(x) \quad ; \quad f(0) = 0$$

Vérifier que f est alors dérivable sur $[0;1]$ et reprendre alors l'étude de φ associée comme précédemment.