Concours Blanc C_3

.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème I : Indécision - des décisions !

Une étudiante de $D2$ ne sait pas trop quelle thématique choisir pour réviser ses épreuves de concours parmi les blocs *Probabilités*; *Algèbre* et *Analyse*. Elle décide alors de tirer au hasard après chaque exercice réalisé de la façon suivante :

- Si elle vient de faire un exercice d'algèbre, alors elle lance un dé usuel et refera de l'algèbre sur un résultat de 1, changera pour de l'analyse sur un résultat de 2 ou 3 et optera pour des probabilités dans tout autre cas.
- Si elle vient de faire un exercice d'analyse ou de probabilité alors elle tirera à pile ou face avec une pièce non truquée pour déterminer la thématique différente choisie pour le prochain exercice.

En outre, cette étudiante ne fera pas deux exercices d'analyse consécutivement ni deux exercices de probabilités consécutivement.

On notera ainsi, abusivement, lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ désigne le nombre d'exercices effectués par cette étudiante :

- P_n l'événement " le n^{ieme} exercice effectué par cette étudiante est un exercice de probabilités."
- A_n l'événement " le n^{ieme} exercice effectué par cette étudiante est un exercice d'analyse."
- R_n l'événement " le n^{ieme} exercice effectué par cette étudiante est un exercice d'algèbre."

Initialement, cette étudiante choisit en premier d'effectuer un exercice d'analyse.

Les parties A et B sont indépendantes. La partie C pourra être traitée en admettant les résultats mentionnés dans les parties A et B

Partie A : Approche probabiliste

1. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(R_n; A_n; P_n)$ constitue un système complet de l'univers étudié.
2. L'entier $n \in \mathbb{N}^*$ étant fixé, déterminer, à l'aide de l'énoncé, les valeurs de $\mathbb{P}_{P_n}(P_{n+1})$, $\mathbb{P}_{A_n}(P_{n+1})$ et de $\mathbb{P}_{R_n}(P_{n+1})$
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\mathbb{P}(R_{n+1}) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(P_n) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(A_n) + \frac{1}{6}\mathbb{P}(R_n)$$
4. On pose $p_n = \mathbb{P}(P_n)$, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et $r_n = \mathbb{P}(R_n)$ et on note $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ a_n \\ r_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Donner X_1
   (b) Déterminer une matrice T vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $X_{n+1} = TX_n$.
   On admet dans la suite qu'une telle matrice T existe de façon unique.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 1$ on a : $X_n = T^{n-1}X_1$

Partie B : étude d'une matrice A

On considère la matrice A définie comme : $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Justifier que A est inversible. (on ne demande pas de calculer son inverse)
2. (a) Vérifier que A admet -3 pour valeur propre. On pourra s'aider du vecteur colonne $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (b) Déterminer l'espace propre associé à la valeur propre -3. On pourra noter E_{-3} cet espace.
   (c) Quelle est la dimension de E_{-3} ? Justifier
3. (a) Déterminer les racines réelles du polynôme $X^2 - 4X - 12$.
   En déduire une forme factorisée de $P(X) = X^3 - X^2 - 24X - 36$
   (b) Démontrer que $P(A) = O_3$ où O_3 désigne la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   Les démarches avec le moins de calcul possibles seront valorisées
   (c) Déterminer le spectre de A (soit, l'ensemble de ses valeurs propres).
4. Démontrer que A est diagonalisable.
5. On définit à présent une nouvelle matrice P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ par :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 7 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

   (a) Démontrer que P est inversible puis calculer son inverse P^{-1}.
   (b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :
$$\left(P^{-1}AP\right)^n = P^{-1}A^nP$$
   (c) En déduire une forme explicite des coefficients de A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Partie C : Synthèse

Dans cet exercice, on note $F = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit $M \in F$ donnée de spectre $sp(M) = \{\lambda\ ;\ \mu\ ;\ \eta\}$

1. Démontrer que, si $N = a \cdot M$ avec $a \in \mathbb{R}$ alors $sp(N) = \{a\lambda\ ;\ a\mu\ ;\ a\eta\}$
2. Justifier que, si U est un vecteur propre de M associé à λ, alors U est aussi un vecteur propre de $N = a \cdot M$ pour $a \in \mathbb{R}$.
3. On suppose maintenant que λ, μ et η sont deux à deux distincts.
   (a) Justifier que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $N = a \cdot M$ est diagonalisable.
   (b) Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, l'espace propre de la matrice $N = a \cdot M$ associé à la valeur propre $a\lambda$ coïncide avec l'espace propre de la matrice M associé à λ.
   on pourra admettre des résultats analogues pour μ et η
4. A et T désignent maintenant les matrices introduites dans les parties A et B.
   (a) Vérifier que $A = 6 \cdot T$
   (b) En déduire les valeurs propres de T.
   (c) Etablir que T est diagonalisable et que :
$$P^{-1}TP = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (d) En déduire les valeurs, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ de $p_n = \mathbb{P}(P_n)$, $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ et de $r_n = \mathbb{P}(R_n)$

(e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ puis $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n$.
Interpréter ces résultats dans le contexte de la situation décrite.

(f) Quelle thématique cette étudiante va-t-elle traiter le plus souvent sur un arbitrairement grand nombre d'exercices ? (ce qui arrivera pour réviser ses concours !)

D'après situation réelle, ens D2 lycée Turgot 2023

Problème II :

Partie A

On considère la fonction f définie sur $I =]-\infty; 1[$ par $f(t) = -\dfrac{1}{t}\ln(1-t)$ si $t \neq 0$ et on fixe $f(0) = 1$.

1. Montrer que f est continue sur l'intervalle I.
2. (a) Démontrer que :

$$\forall t \in I \quad \frac{t}{1-t} + \ln(1-t) \ \geq 0$$

   (b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-{}^*$ et sur $]0; 1[$.
   Déterminer alors f' sur chacun de ces intervalles.

   (c) En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}_-^* =]-\infty; 0[$.
3. (a) Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $t \mapsto \ln(1-t)$

   (b) Démontrer que f est dérivable en 0 et que l'on a $f'(0) = \frac{1}{2}$

   (c) A-t-on que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ? Justifier.
4. Déterminer les limites de f en 1 et en $-\infty$.
5. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant apparaître la tangente en 0.

Partie B

On pourra admaettre dans cette partie que f est une fonction continue sur $I =]-\infty; 1[$. On considère maintenant la fonction L définie sur $I =]-\infty; 1[$ par :

$$\forall x < 1 \quad L(x) = \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t$$

On rappelle que la série $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ converge et on admettra alors que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

1. Justifier que L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et préciser L'.
2. **Etude de L au voisinage de 1** :

   (a) A l'aide d'un changement de variables, établir que :

$$\forall\ (A; B) \in]0; 1[^2 \qquad \int_A^B f(t)\, \mathrm{d}t = \int_{1-B}^{1-A} \frac{-\ln(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t$$

   (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall t \in]0; 1[\qquad f(1-t) = \frac{-\ln(t)}{1-t} = \sum_{k=0}^{n} -t^k \ln(t) \quad + \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}$$

(c) Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 -t^k \ln(t)\, \mathrm{d}t$ converge et :

$$\int_0^1 -t^k \ln(t)\, \mathrm{d}t = \frac{1}{(k+1)^2}$$

(d) On note $\varphi : t \mapsto \dfrac{-t\ln(t)}{1-t}$ définie sur $]0;1[$. Déterminer les limites de φ en 0 et en 1 puis justifier que φ est bornée sur $]0;1[$.

3. Déduire de l'étude de φ qui précède que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t$ converge puis montrer que l'on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{-t^{n+1}\ln(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t = 0$$

4. Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t$ converge et que :

$$\int_0^1 \frac{-\ln(t)}{1-t}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi^2}{6}$$

5. En déduire que L est prolongeable par continuité en 1. Quelle est alors la valeur de $L(1)$?
Conformément à l'énoncé d'origine et à de nombreuses conventions de notation en vogue, nous continuerons de désigner par L le prolongement ainsi obtenu
6. Justifier que la fonction $\psi : x \mapsto L(x) + L(-x) - \frac{1}{2}L(x^2)$ est dérivable sur $]-1;0[$ et sur $]0;1[$.
Calculer alors $\psi'(x)$ pour x pris dans l'un de ces deux intervalles.
7. En déduire que $\forall x \in [-1;1] \quad L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$
8. Préciser la valeur de $L(-1)$

Partie C

On considère maintenant $\mathcal{O} =]-\infty;0[^2$ et on définit sur $\mathcal{O}$ une fonction Φ par :

$$\forall (x;y) \in \mathcal{O} \quad \Phi(x;y) = L(x) + L(y) - L(-xy)$$

1. L'ensemble $\mathcal{O}$ est-il ouvert ? borné ?
2. Justifier que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{O}$
On amdettra que Φ est aussi de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{O}$ dans la suite
3. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de Φ en $(x;y) \in \mathcal{O}$
4. En déduire que Φ admet le point $(-1;-1)$ comme unique point critique.
5. Déterminer la matrice Hessienne de Φ en le point $(-1;-1)$.
6. La fonction Φ admet-elle un extremum local sur $\mathcal{O}$?
Vous détaillerez soigneusement votre démarche.

D'après EMLyon - option économique -2022

Problème III :

Toutes les variables aléatoires de ce problème sont définies sur un même espace probabilisé.

1. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

   (a) Démontrer que f est une densité de probabilité.
   Dans la suite du problème on désigne par Y une variable aléatoire ayant f pour densité.

   (b) On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ pour $x > 0$

   (c) Que vaut $F(x)$ lorsque $x \leq 0$?

2. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 2x^{-3}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$$

   (a) Vérifier que g définit une densité de probabilités.
   Dans la suite du problème on désigne par X une variable aléatoire ayant g pour densité.

   (b) On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On considère $V = (X_1 \; ; \; \ldots \; ; \; X_n)$ un vecteur aléatoire dont les composantes X_i avec $i \leq n$ sont toutes de même loi que X et mutuellement indépendantes. On pourra poser $X_0 = X$ si besoin.

   (a) On note $M_n = \max V = \max(X_1 \ldots X_n)$ et on désigne par G_n sa fonction répartition.
   Exprimer $G_n(x)$ en fonction de $G(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

   (b) En déduire que M_n est une variable aléatoire à densité.

   (c) Décrire $G_n(x)$ explicitement en fonction du réel x.

   (d) On pose $Y_n = \dfrac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de prépartition de Y_n notée F_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geq \dfrac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

4. Soit $x \leq 0$ fixé. Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$?

5. Soient $x > 0$ et n un entier vérifiant $n > \dfrac{1}{x^2}$. Vérifier que $F_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{nx^2}\right)^n$

6. Déterminer un équivalent à l'infini de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$ pour $x > 0$ fixé.

7. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$ pour $x > 0$.

8. Qu'observe-t-on finalement ?