.

Lois à densité particulières

Exercice $\boxed{1}$ Valeurs Connues

On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1] &= v_1 \approx 0,683\\ \mathbb{P}[-2 \leq X \leq 2] &= v_2 \approx 0,954\\ \mathbb{P}[-3 \leq X \leq 3] &= v_3 \approx 0,997\end{aligned}$$

1. Démontrer que si Y suit une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ donnés, on a :
$$\forall k \in \{1;2;3\}\ \ \mathbb{P}[\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma] = v_k$$
2. Etablir, de façon similaire, que si l'on note v_k la valeur $\mathbb{P}[-k \leq X \leq k]$, alors on a bien encore
$$\forall k \in \mathbb{N}\ \ \mathbb{P}[\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma] = v_k$$
3. Etablir que, pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel u_α vérifiant :
$$\mathbb{P}[\mu - u_\alpha\sigma \leq Y \leq \mu + u_\alpha\sigma] = 1 - \alpha$$
puis donner une valeur approchée de $u_{0,05}$.

Exercice $\boxed{2}$ Intégrale de Gauss On définit une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\, dt$$

1. Calculer $f(0)$.
2. On admet pour cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a :
$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\, dt$$
Calculer ainsi $f'(x)$ pour $x \geq 0$ et indiquer la valeur de $f'(0)$.
3. On pose $g(x) = f(x^2)$.
   (a) Calculer $g(0)$.
   (b) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $g'(x) = -2e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$
4. On définit enfin $h(x) = g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt\right)^2$
   (a) Vérifier que $h(0) = \frac{\pi}{4}$.
   (b) Démontrer que h est en fait constante sur $\mathbb{R}_+$. (*Indication : on pourra prouver que h' nulle*)
5. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f'(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} g(x)$.
6. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$

7. Retrouver alors que la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

   est bien une densité de probabilité.

Exercice $\boxed{3}$ *D'après EML 2006*

On considère une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée mais de variance $\frac{1}{2}$.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice $\boxed{4}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x e^{-x^2/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de son graphe.
   On notera X une variable aléatoire admettant f pour densité dans la suite.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X associée à X.
3. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.
4. Déterminer la loi de $Y = X^2$

Exercice $\boxed{5}$ On définit la fonction Erf sur $\mathbb{R}$ par :

$$Erf : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$$

On rappellera, à toute fin utile, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1$

1. Vérifier que la fonction Erf est bien définie sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de Erf.
3. Dresser le tableau des variations complet de Erf sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier la convexité de Erf.
5. Déterminer $Erf^{(n)}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Justifier que Erf admet une fonction réciproque notée Fer puis procéder à son étude.
   On s'intéressera également à la dérivée de Fer.

Exercice $\boxed{6}$ *D'après HEC-Oral voie S*

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite. On désignera par f la densité définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ ainsi que par Φ la fonction de répartition associée à X.

1. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x) dx$ converge. On notera m_r sa valeur.
2. Etablir que si r est un entier impair, alors m_r est nul.
3. Démontrer que si $r = 2p$, pour un certain $p \in \mathbb{N}$, alors $m_r = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.
4. Etablir la convergence, pour tout $a > 0$, de l'intégrale notée F_a définie par :

$$F_a = \int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$$

5. Soit $a > 0$ fixé. On pose $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$ pour $x \in \mathbb{R}$
   (a) Vérifier que g peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.
   (b) Démontrer que Y admet un moment quadratique et déterminer $\mathbb{E}[Y^2]$ ainsi que $\mathbb{V}[Y]$.

Exercice $\boxed{7}$ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. On note Φ sa fonction de répartition.

1. Montrer que, pour tout réel $a > 1$ et tout réel $x > 0$ on l'encadrement :

$$0 \leq x(1 - \Phi(ax)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-ax^2/2}$$

2. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} a \displaystyle\int_0^{+\infty} x(1 - \Phi(ax))\, dx \ = 0$

Exercice $\boxed{8}$ **Introduction à la loi du** $\chi\chi$

Soient $X_1 \ ; \ \dots \ ; \ X_k$ des variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de loi $\mathcal{N}(0;1)$.

On pose $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} X_i^2$. On notera $\chi^2(k)$ la loi associée à X ainsi définie.

1. *Etude de* $k = 1$
   (a) Quel est le support de X ?
   (b) Justifier que la loi $\chi^2(1)$ est à densité et vérifier que la fonction f_X définie par :

$$\forall t > 0 \quad f_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2t\pi}} e^{-t/2}$$

   en est bien une densité.
   (c) Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.
   (d) Etablir que X admet une variance de 2.
2. *Etude plus générale*
   (a) Soit $x = (x_1 \ ; \ \dots \ ; \ x_k) \in \mathbb{R}^k$. Que représente la valeur $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2$ pour x ?
   (b) En déduire la nature topologique de $B_t = \left\{ (x_1 \dots x_k) \in \mathbb{R}^k \mid \displaystyle\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 \leq t \right\}$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.
   (c) On admet que $F : t \mapsto \mathbb{P}[{X_1}^2 + \cdots + {X_k}^2 \leq t]$ est une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
   Etablir que X est une variable aléatoire à densité.
   (d) Prouver que $\mathbb{E}[X] = k$ et déterminer la variance de X en fonction de $k \in \mathbb{N}^*$.

La connaissance d'une densité de cette loi n'est pas attendue. On pourra cependant en retenir les valeurs d'espérance et variance. En guise de prolongements, on pourrait s'assurer de l'existence de moments d'ordre $r > 0$ entiers pour cette loi.

Exercice $\boxed{9}$ **la loi de Student : d'après une histoire vraie**

William Gosset, mathématicien Statisticien, employé de la brasserie irlandaise bien connue *Guinness* a pour mission secrète (et d'importance !) de tester la production de l'entreprise.

Pour cela, il doit inventer un test basé sur les observations d'échantillons de liquide brun dont les différents paramètres (température, amertume etc...) obéissent à des critères stricts.

1. William Gosset commence par s'intéresser à n mesures $M_1 \ ; \ \dots \ ; \ M_n$ assimilées à des variables aléatoires indépendantes de même loi normale centrée réduite (pour des raisons théoriques) et définit Y de sorte que :

$$nY^2 = {M_1}^2 + {M_2}^2 + \cdots + {M_n}^2$$

(a) Justifier que nY^2 est une variable aléatoire à densité et en préciser la loi.

(b) Que représente alors Y pour l'échantillon $(M_1 \ldots M_n)$?

(c) Donner $\mathbb{E}[Y^2]$

2. Etant donné une variable aléatoire X de référence, de loi $\mathcal{N}(0;1)$, indépendante de chaque M_k ($k \leq n$), William Gosset va étudier le rapport $\frac{X}{Y}$.

   (a) Justifier que $\frac{X}{Y}$ admet une espérance pour $n \geq 1$. Quelle est cette espérance ?

   (b) Etablir que $\frac{X}{Y}$ admet $\frac{n}{n-2}$ si $n > 2$. Qu'en est-il si n vaut 1 ou 2 ?

   On retiendra que William Gosset publia sous le pseudonyme *Student* ces travaux et on gardera pour définition officielle de la loi de Student que, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ et si $Y \hookrightarrow \chi^2(n)$ alors, par définition : $S = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$ suit la loi de Student (à n degrés de liberté)

Exercice $\boxed{\textbf{10}}$ Pour $\tau > 0$ fixé et $n \in \mathbb{N}$ on pose :

$$I_n(\tau) = \int_a^{+\infty} x^n e^{-x}\,\text{x}$$

Etablir que l'on a $I_n(\tau) = \tau^n e^{-\tau} + nu_{n-1}(\tau)$ pour tout entier $n \geq 1$

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ **Lambert fait sa Loi**

On définit la fonction w sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad w(x) = \frac{x}{a} e^{a-x} \mathbb{1}_{[a;+\infty[}(x)$$

où a est un paramètre réel strictement positif fixé et que l'on cherchera à identifier dans des contextes différents durant l'exercice.

1. On pose $f(x) = xe^{-x}$ Dresser le tableau complet des variations de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire que f admet une bijection réciproque sur $[1;+\infty[$.

   NB : La fonction réciproque de f sur $[1;+\infty[$ s'apelle fonction de Lambert.
2. Etablir que w induit une densité de probabilité notée h sur $\mathbb{R}_+$.
3. On définit $L_a = \mathbb{1}_{[a;+\infty[} - w$. Démontrer que, pour tout $a \geq 1$ on a que L_a est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On nommera la loi associée *loi de Lambert* de paramètre a et on la notera $\mathcal{L}_a$.
4. Justifier que la fonction L_a admet une réciproque L_a^{-1} sur $[a;+\infty[$ pour $a \geq 1$.
5. On se donne U une VAR à densité de loi uniforme sur $]0;1[$. Démontrer que $Y = L_a^{-1}(U)$ suit une loi de Lambert de paramètre a.