.

Compléments de Diagonalisation

Exercice $\boxed{\mathcal{D}}$ Etudier la diagonalisabilité éventuelle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Exercice $\boxed{\Delta}$ Pour chaque matrice diagonalisable de l'exercice $\boxed{\mathcal{D}}$, procéder à la diagonalisation de façon effective (les matrices de passages sont attendues).
En déduire l'expression des puissances $n$ièmes de chaque matrice diagonalisable.

Exercice $\boxed{1}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A. Cette matrice est-elle diaginalisable ?
2. Démontrer qu'il existe un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. Justifier qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; A^n = a_n A + b_n I_3$$

Exercice $\boxed{2}$ **une Suite Récurrente Linéaire**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dite récurrente linéaire (d'ordre 3), par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \; ; \;\; u_1 = -1 \; ; \;\; u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

On posera $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Décrire $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$
2. En déduire, par récurrence, que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que A n'est pas diagonalisable, mais trigonalisable.
4. Décrire une base de chaque espace propre associé à A.
   On pourra vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
5. Déterminer une matrice P inversible vérifiant $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et en expliciter la matrice inverse P^{-1}
6. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{3}$ **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2**

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dite récurrente linéaire d'ordre, par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R} \; ; \;\; u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N} \; u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

où a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + 4b > 0$

On posera $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Décrire $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$
2. En déduire, par récurrence, que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que A est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; A^n = PD^nP^{-1}$$

   où D est une matrice diagonale à expliciter.
5. *Applications :*
   (a) Décrire explicitement u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = u_1 = 1$ et la relation $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$
   (b) La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le terme général F_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{4}$ Soit A une matrice et Q un polynôme annulateur de A. Démontrer que, si $\lambda \in Sp(A)$ alors λ est racine de Q.

Exercice $\boxed{5}$ Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que $P(X) = 1 - X^3$ et $Q(X) = X^2 - 2X + 1$ sont des polynômes annulateurs de u.
Déterminer $Sp(u)$ et en déduire l'endomorphisme u.

Exercice $\boxed{6}$ On se donne $x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on note H_x la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des x.
Démontrer que H_x est diagonalisable.

Exercice $\boxed{7}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On cherchera, pour cet exercice, à faire le moins de calculs possible.

1. Démontrer que l'on a :

$$\{0_{\mathbb{R}^4}\} \subset ker(A) \subset ker(A^2) \subset ker(A^3) = \mathbb{R}^4$$

   On donnera, en particulier, les dimensions de chaque espace de cette chaine d'inclusions.
2. Démontrer que $ker(A^2)$ admet pour supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ une droite vectorielle.
   On notera w un vecteur directeur de cette droite dans la suite.
3. Etablir la liberté de la famille $(w \; ; \; Aw \; ; \; A^2w)$ dans $\mathbb{R}^4$.
4. Justifier que $Aw \in ker(A^2)$ et que $ker(A^2) = ker(A) \oplus vect(Aw)$
5. Montrer que $A^2w \in ker(A)$ et déterminer v tel que $ker(A) = vect(A^2w) \oplus vect(v)$
6. En déduire que $\mathcal{B} = (w \; ; \; Aw \; ; \; A^2w \; ; \; v)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Déterminer $P^{-1}AP$

Exercice $\boxed{8}$ Reprendre l'exercice précédant avec les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ainsi que $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{9}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Diagonaliser, dans une base orthonormée, chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

Exercice $\boxed{10}$ Déterminer si la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique, définie positive.

Même question avec $A = H_4 - I_4$ où H_n désigne la matrice Attila d'ordre n.

Exercice $\boxed{11}$ Soit n un entier naturel non nul donné et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ fixée.
Démontrer que $S = {}^tAA$ est diagonalisable et que $Sp(S) \subset \mathbb{R}_+$

Exercice $\boxed{12}$ Soit n un entier naturel non nul donné et $S \in \mathcal{S}ym_n(\mathbb{R})$ dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$.
Démontrer qu'il existe une matrice A carrée d'ordre n telle que $S = {}^tAA$.

Exercice $\boxed{13}$ On se donne l'application u définie par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer si u est diagonalisable. Si tel est le cas, diagonaliser u.

Exercice $\boxed{14}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Démontrer que, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisable alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(f)$ endomorphisme diagonalisable.

Exercice $\boxed{15}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ **Diagonalisabilité des projecteurs en dimension finie**
Soit p un projecteur de $E = \mathbb{R}^n$. On rappelle que $p^2 = p \circ p = p$.

1. Etablir que $id_E - p$ est aussi un projecteur de E.
2. Justifier que $ker(p) \oplus Im(p) = E$
3. Soit q un autre projecteur de E tel que $p + q$ soit encore un projecteur de E.
   (a) Montrer que $pq = qp = 0_E$
   (b) Etablir que $Im(p+q) = Im(p) + Im(q)$
   (c) Démontrer que $ker(p+q) = ker(p) \cap ker(q)$
4. Conclure enfin que tout projecteur p de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.

Exercice $\boxed{16}$ **D'après ECRICOME - voie S 2018**
On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, muni du produit scalaire canonique. On considère u et v deux endomorphismes de E, et on note A et B leurs matrices respectives dans la base canonique de E.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose *dans cette question uniquement* que $n = 2$ et que les matrices de u et v dans la base canonique sont respectivement :
$$A = \frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$
   (a) Vérifier que u et v sont des projecteurs. Sont-ils diagonalisables ?
   (b) Vérifier que les endomorphismes u, v et $u \circ v$ sont tous de rang 1.

(c) Vérifier que le vecteur $x_0 = (1\ ;\ a)$ est un vecteur propre de $u \circ v$.

(d) Déterminer le spectre de $u \circ v$ puis vérifier que les valeurs propres de $u \circ v$ appartiennent à l'intervalle $[0; 1]$.

(e) Pour quelle(s) valeur(s) de a, $u \circ v$ est-il un projecteur ?

2. *On revient dans cette question au cas général*, où n désigne un entier tel que $n \geq 2$.
On suppose que u et v sont des projecteurs symétriques de E et on pose : $C = BAB$.

(a) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\|BX\|^2 = \langle BX, X\rangle$

(b) En déduire que pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\|BX\| \leq \|X\|$

(c) Montrer que C est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

(d) Soit λ une valeur propre de C et un X un vecteur propre associé. Exprimer $\|ABX\|^2$ en fonction de λ et $\|X\|$.

(e) En déduire que les valeurs propres de C sont réelles positives.

Exercice $\boxed{17}$ D'après EML - voie S 2018

Soit $n \geq 2$ un entier naturel. On note $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B} = (1, X, \ldots, X^n)$ sa base canonique.

On note, pour tout polynôme P de E : $\varphi(P) = \dfrac{1}{n}X(1-X)P' + XP'$

1. Montrer que φ définit un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de φ dans la base $\mathcal{B}$. Préciser le rang de cette matrice.
3. (a) L'endomorphisme φ est-il injectif ? Justifier votre réponse.

   (b) Soit $P \in \ker(\varphi)$ non nul. Montrer que P admet 1 comme unique racine, et que P est de degré n.

   (c) En déduire une base de $\ker(\varphi)$.
4. Montrer que φ est diagonalisable.
5. On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $P_k = X^k(1-X)^{n-k}$.

   (a) Pour tout k de $[\![0, n]\!]$, calculer $\varphi(P_k)$.

   (b) Montrer que la famille $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ est une base de E et expliciter la matrice de φ dans cette base.

   (c) Déterminer les sous-espaces propres de φ.