.

Optimisation avec ou sans contraintes

Eléments de théorie générale

Exercice $\boxed{1}$ $\boxed{\textbf{RàR}}$

1. Soit S une matrice symétrique d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels.
   Démontrer que si l'on peut trouver $r > 0$ tel que $h \in \mathcal{B}(O_n; r) \Rightarrow {}^t hSh \geq 0$ alors on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad {}^t xSx \geq 0$$
2. Soit f une fonction définie, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.
   (a) Redonner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage de $x_0 \in \mathcal{U}$
   (b) On suppose que f admet un minimum local en x_0 de $\mathcal{U}$.
   Justifier que $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad {}^t h \cdot \nabla^2(f)(x_0) \cdot h \geq 0$ et en déduire que la matrice hessienne de f en x_0 est symétrique, diagonalisable à valeurs propres positives.
   (c) Etablir un résultat analogue lorsque f réalise un maximum local en $x_0 \in \mathcal{U}$.

Exercice $\boxed{2}$ $\boxed{\textbf{RàR}}$ On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un point $x_0 \in \mathcal{U}$ supposé critique pour f.
Par souci de simplicité et de clarté, nous noterons abusivement ∇^2 la matricienne de f en x_0.

1. On suppose ici que ∇^2 est définie positive, à valeurs propres strictement positives.
   (a) Justifier que, pour un certain $r > 0$, on a que :
   $$\forall h \in \mathcal{B}(O_n; r) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$$
   avec égalité seulement si $h = O_n$.
   (b) En déduire que f réalise un minimum local en x_0.
2. Etablir un résultat analogue lorsque ∇^2 est définie négative, à valeurs propres strictement négatives.
3. Expliciter ces résultats dans le cas où $n = 2$ et obtenir un critère portant sur r, s et t lorsque l'on écrit :
   $$\nabla^2(f)(x_0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$
4. *Application :* On donne $f(x; y) = x^4 + y^4 - 4x^2 + 8xy - 4y^2$. Déterminer les points critiques de f puis optimiser (sans contrainte) la fonction f.

Optimisation sous contraintes - liaisons explicites

Exercice $\boxed{3}$ Optimiser $f(x; y) = xy - 2x + 1$ sous la contrainte $x - y + 6 = 0$.

Exercice $\boxed{4}$ On pose $f(x; y) = x^2 - y^4 - y^2 + 2xy$, définie sur $\mathbb{R}^2$ muni de la contrainte $x + y^2 = 0$.
Optimiser f sous cette contrainte.

Exercice $\boxed{5}$ On pose $f(x; y; z) = ze^{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^3$ muni de la contrainte $1 = x^2 - y - z$.
Optimiser f sous cette contrainte.

Optimisation sous contraintes -démarche guidée

Exercice $\boxed{6}$ D'après EnsD2 - 2016

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x;y) = x^3 + y^3$. On souhaite déterminer les extrema de f sur le domaine D défini par :

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

1. Déterminer la nature topologique de D.
2. Posez le Lagrangien $L(x;y;\mu)$ du programme où μ désigne un pultiplicateur de Lagrange.
3. Posez la condition de qualification du problème.
4. Déterminez le gradient du Lagrangien.
5. Quels sont les points critiques associés à $\mu = \dfrac{3}{2}$? à $\mu = -\dfrac{3}{2}$
6. Déterminez les deux autres points critiques.
7. Déterminez la Hessienne bordée.
8. Montrez que le programme admet trois minima locaux, ainsi que trois maxima locaux.

Exercice $\boxed{7}$ D'après EnsD2 - 2017

On s'intéresse à l'ensemble des $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^6 + y^6 = 1$. On souhaite en déterminer le(s) point(s) le(s) plus proche(s) de l'origine au sens de la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
Ce problème peut être modélisé comme la minimisation sous contrainte d'une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Quelle est l'expression de $f(x;y)$ en fonction de x et de y ?
2. Posez le Lagrangien $L(x;y;\lambda)$ du programme, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Lagrange.
3. Déterminez le gradient du Lagrangien.
4. Montrez qu'il existe deux valeurs du multiplicateur vérifiant les conditions du premier ordre.
   On les notera λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
5. Déterminez les points critiques associés au multiplicateur λ_1, puis au multiplicateur λ_2.
6. Montrer que f prend une même valeur V_1 aux points critiques associés à λ_1.
7. Montrer que f prend une même valeur V_2 aux points critiques associés à λ_2.
8. En déduire le ou les minima recherchés, s'il existent.

Optimisation sous contraintes -contraintes plus générales

Exercice $\boxed{8}$ Dans chaque cas, résoudre le problème d'optimisation proposé :

1. Optimiser f définie par $f(x;y) = xe^y + ye^x$ sous la contrainte $x - y = 0$.
2. Optimiser f définie par $f(x;y) = x^2y$ sous la contrainte $(x;y) \in \partial\mathcal{B}(O;3) = \mathcal{C}(O;3)$
3. Optimiser $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z$ sous la contrainte $x - 2y^2 + z = 0$
4. Optimiser f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(X) = ||X||_2^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 + 2z = 6$ et $x - y - z = 0$.
5. Optimiser $f(x;y) = \dfrac{x+y}{xy}$ sous la contrainte $\ln x + \ln y = -2$.
   On précisera au préalable le domaine $\mathcal{D}$ de définition de f, ainsi que sa nature topologique.