.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème I : Optimisation

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x; y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

Partie A : Etude globale

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f
   (b) Déterminer les points critiques de f
3. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f
   (b) Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur
4. L'extremum local trouvé est-il global ?

Partie B : Etude d'une tranche

Dans cette partie, on étudie la fonction f dans la région du plan $\mathbb{R}^2$ d'équation $y = 1$. On pose alors :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = f(x; 1)$$

ce qui définit une fonction g sur $\mathbb{R}$

1. On note $H = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 1\}$.
   (a) Quelle est la nature topologique de H ? (ouvert, fermé, borné)
   (b) L'ensemble H est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
2. Justifier que, pour tout entier naturel $n \geq 4$ l'équation $g(x) = n$ d'inconnue réelle x admet une solution unique que l'on notera u_n
3. On note h la restriction de g à $I = [1; +\infty[$
   (a) Justifier que h est bijective de $[1; +\infty[$ dans $h(I)$ que l'on déterminera.
   (b) Dresser alors le tableau des variations de l'application réciproque h^{-1}
   (c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$
4. Déterminer le réel α vérifiant $u_n \sim n^\alpha$ pour n au voisinage de $+\infty$

D'après EDHEC voie Economique, 2021

Problème II : Machines à Sous

Toutes les variables aléatoires considérées dans ce problème sont supposées définies sur un même espace de probabilisé. La lettre p désigne une valeur de $]0;1[$ et la quantité $1-p$ sera notée q. On pourra alors considérer que $q \in]0;1[$.

On considère en particulier une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ dont la loi est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}([X=k]) = q^k p = (1-p)^k p$$

Préliminaires

On pourra admettre les résultats obtenus dans cette partie pour effectuer le reste du problème
On définit $Y = X+1$ une nouvelle variable aléatoire. Justifier que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre puis en déduire que X admet une espérance et une variance dont les valeurs respectives sont :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p} \quad \text{et} \quad \mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}$$

Partie A : les joueurs

Un casino a conçu une nouvelle machine à sous dont le fonctionnement est le suivant :

- Le joueur introduit k jetons où $k \in \mathbb{N}$ est un nombre choisi par le joueur lui-même, puis appuie sur un bouton pour activer la machine.
- Si $k=0$ alors la machine ne reverse rien.
- Si $k \geq 1$ alors la machine définit k variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_k$ mutuellement indépendantes et de même loi que X introduite initialement dans ce problème, puis reverse au joueur le nombre de jetons $X_1 + \cdots + X_k$.
- Le fonctionnement de chaque machine ne dépend que de nombre de jetons introduits au moment de son activation, et pas de ce qui aurait été introduit ou reversé lors des activations précédentes.

Afin d'étudier la valeur du paramètre p à fixer (en calibrant la machine), le casino effectue l'hypothèse d'un joueur *invétéré* utilisateur de la machine. Ainsi, un joueur *invétéré* joue tous ses jetons à chaque activation de la machine puis place l'intégralité des jetons reversés pour l'activation suivante, encore et encore.

On note Z_n avec $n \in \mathbb{N}$ la variable aléatoire égale au nombre de jetons dont dispose le joueur après exactement n activations de la machine. On supposera que le joueur étudié pour la modélisation dispose d'un seul jeton pour commencer : ainsi $Z_0 = 1$. On remarquera que Z_1 suit la même loi que X.
On définit enfin $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \mathbb{P}([Z_n = 0])$, suite des probabilités que le joueur n'ait plus de jeton après n activations de la machine et on notera R l'événement "*Le joueur n'a plus de jetons*".

1. (a) Préciser les valeurs de u_0 et u_1
   (b) Comparer, de façon générale, avec $n \in \mathbb{N}$, les événements $[Z_n = 0]$ et $[Z_{n+1} = 0]$
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et qu'elle converge.
   On notera $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ dans la suite.
2. Justifier que $\mathbb{P}(R) = l$
3. (a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_2 = 0]) = (u_1)^k$
   On admettra ensuite que ce résultat se généralise sous la forme $\mathbb{P}_{[Z_1=k]}([Z_{n+1} = 0]) = (u_n)^k$
   (b) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([Z_1 = k])(u_n)^k \ = \frac{p}{1-qu_n}$$
4. (a) Démontrer que l vérifie l'équation $(l-1)(ql-p) = 0$
   (b) On suppose ici que $p \geq \frac{1}{2}$. Montrer qu'alors $\mathbb{P}(R) = 1$
   (c) On suppose ici que $p < \frac{1}{2}$. Montrer qu'alors $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \in \left[0; \dfrac{p}{q}\right]$ puis que $\mathbb{P}(R) < 1$ dans ce cas.
   (d) Expliquer pourquoi le casino préférera choisir p dans l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

Partie B : le casino

Dans toute cette partie, on suppose que $p \geq \frac{1}{2}$.
Le casino cherche la valeur à donner à p pour que le joueur joue le plus longtemps possible dans le casino et ainsi, dépense plus d'argent dans les consommations au bar.
On note T la variable aléatoire égale au nombre d'activations de la machine effectuées par le joueur lorsque, pour la première fois, celui-ci n'a plus de jeton.
On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 1 - \mathbb{P}([Z_n = 0]) = 1 - u_n$. Tous les résultats de la partie A pourront être utilisés sans justification dans cette partie (ils devront néanmoins être cités lors de leur utilisation)

1. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \mathbb{P}([T \leq n])$ puis $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}([T = n]) = v_{n-1} - v_n$
2. Montrer que, pour tout N de $\mathbb{N}^*$ que :
$$\sum_{n=1}^{N} n\mathbb{P}([T = n]) = \sum_{n=0}^{N-1} v_n \quad - Nv_N$$
3. On suppose dans cette question que $p = \frac{1}{2}$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{n}{n+1}$
   (b) En déduire que la variable aléatoire T n'admet pas d'espérance.
4. On suppose maintenant que $p > \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $w_n = \dfrac{1 - u_n}{\frac{p}{q} - u_n}$
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad w_{n+1} = \frac{q}{p} w_n$
   (b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \dfrac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^n}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{n+1}}$ puis établir que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leq v_n \leq \left(\dfrac{q}{p}\right)^n$
   (c) Démontrer que T admet une espérance $\mathbb{E}[T]$ qui vérifie $\mathbb{E}[T] \leq \dfrac{1}{1 - \frac{q}{p}}$
5. Quelle(s) valeur(s) de p recommanderiez-vous au casino ?

D'après EMLyon voie Economique, 2022

Problème III

Partie A

Pour tout couple $(p; q)$ d'entiers naturels on pose $I(p;q) = \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^q \, \mathrm{d}x$

1. (a) Justifier que cette intégrale est bien définie.
   (b) Démontrer que l'on à :
$$\forall (p;q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad I(p;q) = \frac{q}{p+1} I(p+1; q-1)$$
   On admet qu'un raisonnement par récurrence permet d'obtenir :
$$\forall (p;q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \quad I(p;q) = \frac{p!q!}{(p+q)!} I(p+q; 0)$$
2. (a) Expliciter la valeur de $I(p+q;0)$ pour $(p;q) \in \mathbb{N}^2$.
   (b) En déduire une expression explicite de $I(p;q)$ en fonction de p et de q.
   (c) Démontrer que $\forall p \in \mathbb{N} \quad \displaystyle\int_0^1 x^p (1-x)^p \mathrm{d}x = \frac{(p!)^2}{(2p+1)!}$

Partie B

Dans cette partie, on désigne par n un entier naturel quelconque et on pose $\alpha_n = \dfrac{(2n+1)!}{(n!)^2}$

On considère la fonction b_n définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad b_n(x) = \alpha_n x^n (1-x)^n \cdot \mathbb{1}_{[0;1]}(x)$$

où l'on rappelle que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et vaut 0 sinon.

1. Démontrer que b_n est une densité de probabilité.
   On considère désormais les variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}$ définies comme ayant b_k pour densités respectives.
2. Reconnaître la loi de X_0.
3. *Dans cette question, on pourra exploiter les résultats proposés par la partie A qu'ils aient été justifiés où non*
   (a) Justifier que X_n possède une espérance et que cette espérance notée $\mathbb{E}[X_n]$ vaut $\frac{1}{2}$
   (b) Démonter que X_n admet une variance $\mathbb{V}[X_n]$ puis la calculer en fonction de n.
   (c) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebytcheff, établir que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}\left(\left[\left|X_n - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right]\right) = 0$$

D'après EDHEC voie Economique, 2022

Problème IV : Trouvez l'erreur

Lors de l'entretien d'embauche pour un poste de relecteur, l'employeur fournit un text contenant n erreurs, indépendantes les uns des autres et connues de l'employeur mais pas du relecteur.
On numérote les erreurs avec l'indice j allant de 1 à n. On suppose que la probabilité p de reprérer une erreur est la même pour toutes les erreurs, et par la suite, on appellera p la qualité du relecteur. On note $X_j = 1$ si l'erreur j est repérée et $X_j = 0$ sinon.

Partie A : relecteur fixé

1. Quelle est la loi de probabilité de X_j ? Quelle est son espérance ?
2. Démontrer que $\hat{p} = \dfrac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}$ est un estimateur sans biais de p.
3. Déterminer la variance de l'estimateur $\hat{p}$
4. On pose $EQM(\hat{p}) = \mathbb{E}[\hat{p} - p]^2 + \mathbb{V}(\hat{p})$. Démontrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} EQM(\hat{p}) = 0$
5. Expliquer alors pourquoi on peut considérer que l'on a la capacité d'estimer p aussi précisemment que l'on veut.

Partie B : erreur fixée

On donne maintenant le texte à plusieurs relecteurs, considérés indépendants les uns des autres, chaque relecteur étant indexé par un entier $k \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la valeur de p est la même pour chaque relecteur. Un même relecteur peut repérer plusieurs erreurs de la même façon qu'une même erreur peut être repérée par plusieurs relecteurs.

1. Soit j désignant un indice d'erreur. On note Y_j la variable aléatoire égale au nombre de relecteurs nécessaires pour repérer l'erreur d'indice $j \leq n$. Déterminer la loi de Y_j
2. Calculer la fonction de répartition G_j de Y_j.
3. On note finalement X la variable aléatoire donnant le nombre de relecteurs nécessaires pour repérer toutes les erreurs au moins une fois. Exprimer X en fonction des Y_j puis calculer sa fonction de répartition F.

[BONUS :] Retrouvez les erreurs (de français) de l'énoncé (qui figuraient sur le sujet original)
Aucun bonus ne sera accordé à tout candidat n'ayant pas au moins traité les questions 1. et 2. de la partie A.

D'après Ens Paris-Saclay D2, filière Eco-Gestion, 2022

ANNEXE :

On rappelle l'inégalité de BienAymé-Tchebytcheff :
Pour X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordre 1 et 2, si ε désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On rappelle l'inégalité de BienAymé-Tchebytcheff :
Pour X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordre 1 et 2, si ε désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On rappelle l'inégalité de BienAymé-Tchebytcheff :
Pour X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordre 1 et 2, si ε désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On rappelle l'inégalité de BienAymé-Tchebytcheff :
Pour X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordre 1 et 2, si ε désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On rappelle l'inégalité de BienAymé-Tchebytcheff :
Pour X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordre 1 et 2, si ε désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On rappelle l'inégalité de BienAymé-Tchebytcheff :
Pour X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordre 1 et 2, si ε désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On rappelle l'inégalité de BienAymé-Tchebytcheff :
Pour X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordre 1 et 2, si ε désigne un réel strictement positif, alors on a :

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$