.

Algèbre Bilinéaire

Exercice $\boxed{1}$ Pour chacune des applications ci-dessous, déterminer celles qui sont des formes bilinéaires (précisez alors les espaces concernés) :

a) pour $x = (x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3)$ et $y = (y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3)$, l'application : $f(x;y) = x_1y_1+6x_2y_2+3x_3y_3+2x_1y_2+3x_1y_3+3x_3y_1$

b) pour $x = (x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3)$ et $y = (y_1\ ;\ y_2)$, l'application : $g(x;y) = x_1y_1 - x_2y_2 + 3x_1y_2 - 4x_2y_1 + 5x_3y_1$

c) pour $x = (x_1\ ;\ x_2)$ et $y = (y_1\ ;\ y_2)$, l'application : $h(x;y) = 2x_1y_1^2 - 3x_2y_2^2 + 6x_1y_2 - 2x_2y_1$

d) pour $x = (x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3)$ et $y = (y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3)$, l'application : $\varphi(x;y) = (x_1y_1 + x_2y_2\ ;\ 3x_1y_2 + x_2y_1)$

e) pour $x = (x_1\ ;\ x_2\ ;\ x_3)$ et $y = (y_1\ ;\ y_2\ ;\ y_3)$, l'application :

$$\psi(x;y) = (x_1+x_2)(y_1+y_2) + (x_1+x_3)(y_1+y_3) + (x_2+x_3)(y_2+y_3) - 5(x_1+x_2+x_3)(y_1+y_2+y_3)$$

Exercice $\boxed{2}$ Parmi les formes bilinéaires de l'exercice $\boxed{1}$, indiquez celle(s) qui permettent de définir un produit scalaire.

Exercice $\boxed{3}$ On définit sur $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ une application par :

$$(X;Y) \mapsto \langle X|Y\rangle = (x_1+x_2)y_1 + (x_1+3x_2)y_2 + 3x_3y_3$$

Cette application définit-elle un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice $\boxed{4}$ On se propose de définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$. Indiquez, parmi les propositions suivantes, celle(s) qui permettent effectivement d'y aboutir :

a) $\varphi(P;Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt$

b) $\varphi(P;Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} (P'(t)Q(t) + P(t)Q'(t))\,dt$

c) $\varphi(P;Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\,dt\ +\ P(0)Q(0)$

d) $\varphi(P;Q) = \displaystyle\int_{0}^{2} P(t)Q''(t)\,dt$

Exercice $\boxed{5}$ Soit λ un réel fixé. On se donne $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x;y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_3y_3 - 5(x_1y_2 + x_2y_1) + 6x_2y_3 - \lambda x_3y_2$$

Vérifier que φ est bilinéaire et déterminer l'ensemble des valeurs λ pour lesquelles φ permet de définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.

Exercice $\boxed{6}$ On donne $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Vérifier que l'application $\varphi(X;Y) = {}^tXAY$ est une forme bilinéaire, définie sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
2. A quelle condition sur A a-t-on φ symétrique ?

Exercice $\boxed{7}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$ donné. On définit $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$h(x;y) = \sum_{k=1}^{n} kx_ky_k$$

Cette application est-elle bilinéaire ? Si oui, peut-elle définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$?
Peut-on définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ grâce à Φ ainsi définie ?

Exercice $\boxed{8}$ On considère $n \geq 2$ entier naturel. On note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on définit deux applications sur $E \times E$ par :

$$h : (A; B) \mapsto tr\left({}^tAB\right) \qquad \varphi : (A; B) \mapsto det\left({}^tAB\right)$$

Etudier la bilinéairité de h et φ, et en déduire celle(s) qui permette(nt) de définir un produit scalaire sur E.

Exercice $\boxed{9}$ Soit $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.

1. Etablir que :
$$\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{{x_1}^2 + \dots x_n^2}{n}$$
2. Etablir ensuite que, si l'on a $x_i > 0$ pour chaque $i \leq n$ alors :
$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) \geq n^2$$
3. Vérifier que $\Omega = (\mathbb{R}_+^*)^n$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
4. En déduire le minimum de $f(x_1 \dots x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}\right)\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)$ sur l'ouvert Ω.

Exercice $\boxed{10}$ Démontrer que $\langle P|Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(k)Q(k)$ définit un produit scalaire sur $E = \mathbb{R}_n[X]$ lorsque $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{11}$ Justifier que q définie sur $\mathbb{R}^3$ par :

$$q(x; y; z) = x^2 + 3(x + y - z)^2 + (z - y)^2$$

est une forme quadratique et déterminer sa forme polaire associée. Quelle est sa signature ?

Exercice $\boxed{12}$ Vérifier que l'application q définie sur $\mathbb{R}^2$ par $q(x; y) = -2xy$ est une forme quadratique puis indiquer sa signature.

Exercice $\boxed{13}$ On définit l'application q sur $\mathbb{R}^3$ part $q : (x; y; z) \mapsto x^2 - 4xy - 10xz + 3y^2 + 5yz - z^2$.

1. Vérifier que q est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la forme polaire φ associée à q et donner la matrice représentative selon la base canonique $(e_1; e_2; e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3. Peut-on définir un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ au moyen de φ ?
4. Déterminer l'ensemble des éléments x de $\mathbb{R}^3$ vérifiant $\varphi(e_i; x) = 0$ pour chaque $i \leq 3$

Exercice $\boxed{14}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Pour chacune des matrices données, indiquer celle(s) qui représente(nt) une forme bilinéaire symétrique et, le cas échéant, indiquer la signature de la forme quadratique associée :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \quad ; \quad H_n = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Le corrigé est donné dans le supplément **signatures des formes quadratiques**