.

Algèbre linéaire

Exercice $\boxed{1}$ Les ensembles de fonctions *à valeurs réelles* décrits étant munis de leurs opérations naturelles d'addition et de multiplication scalaire, indiquer ceux qui forment des espaces vectoriels :

1. L'ensemble des fonctions $f : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continues, positives ou nulles.
2. L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de limite nulle en $+\infty$
3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0;1]$
4. L'ensemble des fonctions impaires définies sur $\mathbb{R}$
5. L'ensemble des fonctions nulles en 1 <u>et</u> en 4
6. L'ensemble des fonctions nulles en 1 <u>ou</u> en 4
7. L'ensemble des fonctions continues sur $[a;b]$ vérifiant $f(a) = 7f(b) + \displaystyle\int_a^b t^3 f(t)\, dt$
8. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f'' + \omega \cdot f = 0$, où ω désigne un réel fixé.
9. L'ensemble des primitives de la fonction $x \mapsto xe^x$

Exercice $\boxed{2}$ chez les polynômes

On se place dans l'espace $E = \mathbb{R}[X]$ des polynômes à coefficients réels. Parmi les ensembles suivants, lesquels constituent des sous-espaces vectoriels de E ?

1. L'ensemble des polynômes de degré exactement $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé)
2. L'ensemble des polynômes dont le coefficient de degré exactement $n \in \mathbb{N}^*$ (fixé) est nul
3. Le réel a étant fixé, l'ensemble des polynômes admettant a pour racine
4. L'ensemble des polynômes pour lesquels 0 est racine simple
5. L'ensemble des polynômes unitaires (*i.e.* ceux dont le coefficient dominant est 1)

Exercice $\boxed{\mathcal{L}}$ Pour chaque application proposée, dire si elle est linéaire de E vers F pour les espaces proposés :

1 $\quad f \mapsto f'(1/2) + \int_0^1 f(t)dt \qquad (E = \mathcal{C}^1([0;1])\ ;\ F = \mathbb{R})$

2 $\quad f \mapsto \dfrac{f}{1 + id_{\mathbb{R}}^2} \qquad (E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})\ ;\ F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$

3 $\quad (x;y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2} \qquad (E = F = \mathbb{R}^2)$

4 $\quad M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} M \qquad (E = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R})\ ;\ F = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R}))$

5 $\quad P(X) \mapsto XP'(X) - P(X+1) \qquad (E = \mathbb{R}[X]\ ;\ F = \mathbb{R}[X])$

7 $\quad f \mapsto \left(\displaystyle\int_0^1 f(t)dt\right) \cdot \exp \circ (-id_{\mathbb{R}}) \qquad (E = \mathcal{C}^0([0;1])\ ;\ F = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}))$

Parmi les applications linéaires, lesquelles sont des endomorphismes ?

Exercice $\boxed{3}$ Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. Démontrer que l'application ν_a définie sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ par $\nu_a(f) = f(a)$ est une application linéaire. Quel en est l'espace d'arrivée ?

Exercice $\boxed{4}$ On définit sur l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles les applications φ et ψ par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \mapsto & (u_{n+1} - 2u_n)_{n\in\mathbb{N}} \end{array}$$

1. Démontrer que φ et ψ sont des applications linéaires. Sont-ce des endomorphismes ? Si oui, précisez de quel espace.
2. Justifier que φ est surjective mais non injective.
3. Déterminer le noyau $ker(\psi)$ de ψ. L'application ψ est-elle injective ?
4. Déterminer l'image $\psi(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par ψ. L'application ψ est-elle surjective ?

Exercice $\boxed{5}$ On considère l'ensemble $\mathcal{V}$ des variables aléatoires discètes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. On admettra que $\mathcal{V}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
On notera $\mathcal{L}^p$ l'ensembles des éléments de $\mathcal{V}$ qui admettent un moment d'ordre p.

1. Démontrer que $\mathbb{E}$ est une forme linéaire non injective de $\mathcal{L}^1$.
2. Qu'en est-il de l'application m_r définie sur $\mathcal{L}^r$ associant le moment d'ordre r pour $r \in \mathbb{N}$?
3. Justifier que, ni $\mathbb{V}$ ni σ ne sont des applications linéaires sur $\mathcal{L}^2$.

Remarque : Dans le cas général, Ω étant donné, la notation $\mathcal{L}^p(\Omega)$ est conventionnelle.

Exercice $\boxed{6}$ On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par :

$$\varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + XP' - 4P$$

1. Démontrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Déterminer le degré de $\varphi(P)$ pour $P \in \mathbb{R}[X]$ non nul.

Exercice $\boxed{7}$ On se place dans l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.

1. Démontrer que $trans : X \mapsto {}^tX$ est linéaire et en déterminer le noyau. En déduire que $trans$ est un automorphisme de E.
2. On définit sur E l'application *trace* notée *tr* par : $tr : X \mapsto \sum_{k=1}^{n} X_{kk}$.
   Justifier que X est une forme linéaire de E puis déterminer une base et la dimension de son noyau.
3. L'application $det : M \mapsto det(M)$ est-elle linéaire sur E ?

Exercice $\boxed{8}$ *Un morphisme intégral*
On note $E = \mathbb{R}[X]$ et on définit φ sur E par :

$$\varphi(P) = \int_0^1 XP'(X)dX$$

1. Démontrer que φ est une forme linéaire de $\mathbb{R}[X]$.
2. On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer l'image de $\mathcal{B}$ par φ.
3. Déterminer le noyau $ker(\varphi)$ de φ, puis un supplémentaire de ce noyau.

Exercice $\boxed{9}$ On définit l'application Φ sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par $\Phi(f) = f' - f$.

1. Vérifier que Φ est un endomorphisme de E. Est-ce un automorphisme ?

2. Déterminer le noyau de Φ (*indication :* c'est un espace de dimension 1 contenant la fonction $\exp$).

Exercice $\boxed{\textbf{10}}$ *Etude de décompositions par projecteurs*

On note $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ et on définit sur E les applications :

$$\Phi : f \mapsto \frac{1}{2}\left(f + f \circ (-id_{\mathbb{R}})\right) \qquad \Psi : f \mapsto \frac{1}{2}\left(f - f \circ (-id_{\mathbb{R}})\right)$$

1. Expliciter les images $\Phi(\exp)$ et $\Psi(\exp)$ que l'on note ch et sh respectivement. En dresser les tableaux de variations.
2. Etablir que Φ et Ψ sont deux projecteurs de E.
3. Déterminer les noyaux et images respectifs de Φ et Ψ.
4. Déterminer les endomorphismes $\Phi \circ \Psi$ et $\Psi \circ \Phi$.
5. En vous inspirant des résultats qui précèdent, démontrer que :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = Sym_n(\mathbb{K}) \oplus Antisym_n(\mathbb{R})$$

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ On définit l'application u sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $u(P) = (2X+1)P - (X^2-1)P'$

1. Montrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer sa matrice relativement à la base canonique.
2. Déterminer les valeurs propres de u.

Exercice $\boxed{\textbf{12}}$ On dit qu'un endomorphisme u sur E est *nilpotent* lorsqu'il vérifie :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad u^n = 0_E$$

1. Démontrer qu'un tel endomorphisme n'est pas inversible et en donner son spectre.
2. Etablir qu'en revanche, $id_E - u$ est inversible. En donner une expression de l'inverse au moyen de u.

Exercice $\boxed{\textbf{13}}$ *Un cas étrange qui sert de contre-exemple*

On se donne deux applications g et f définies sur $\mathbb{K}[X]$ par :

$$g : P \mapsto XP \qquad f : P \mapsto \frac{P(X) - P(0)}{X}$$

1. Dans cette question, on assimile un polynôme P avec la fonction polynômiale associée.
   (a) Vérifier que, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ la fonction $f(P)$ est prolongeable en $0_{\mathbb{K}}$ par continuité.
   (b) En déduire que le prolongement par continuité de $f(P)$ est un élément de $\mathbb{K}[X]$.

   On pourra à présent considérer que f est à valeurs dans $\mathbb{K}[X]$ à partir des résultats précédents
2. Démontrer que f et g sont des endomorphismes de $\mathbb{K}[X]$
3. Justifier que $f \circ g \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X])$ puis déterminer explicitement $(f \circ g)(P)$.
4. Démontrer que $g \circ f$ n'est pas infective.
5. Comparer alors les endomorphismes $g \circ f$ et $f \circ g$.
6. De façon générale, si φ et ψ sont des endomorphismes d'un espace vectoriel E, la seule connaissance de $\varphi \circ \psi$ suffit-elle à conclure que φ et ψ sont inversibles ? Discuter selon la dimension de E.