.

Signature d'une Forme Quadratique

Dans ce supplément, nous proposons de définir la notion de *signature* d'une forme quadratique, comprendre en lien avec le *signe* au sens usuel.

Du point de vue du programme officiel, cette notion n'est pas attendue, mais elle est utile en optimisation des fonctions de plusieurs variables de distinguer les formes quadratiques de signature *pleine* des autres.

Les propriétés seront alors énoncées sans démonstration : ces dernières servent à guider la compréhension des notions introduites mais ne seront en fait pas employées dans les exercices traités dans le cadre des concours.

Le signe avant la signature

Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et h sa forme polaire associée (la forme bilinéaire symétrique définie via la formule de polarisation).

- On rappelle que q est dite *positive* lorsqu'elle est positive en tant que fonction c'est-à-dire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad q(x) \geq 0$$

- De façon analogue, on peut exprimer que q est *négative* lorsque $q\left(\mathbb{R}^n\right) \subset \mathbb{R}_-$.
- Nous pouvons, à cela, adjoindre la notion de *définie positive* lorsque, cette fois, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0_n \implies q(x) > 0$$

  et rappeler que $q(0_n) = 0$.
- Il est alors possible de parler de forme quadratique *définie négative* lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x \neq 0_n \implies q(x) < 0$$

Faisons le lien avec les valeurs propres :

> **Propriété** :
> Dans le contexte décrit initialement :
> - Si q est positive si, et seulement si, dans toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice représentative M de h (et donc aussi de q par abus) admet des valeurs propres positives.
> - Si q est négatives si, et seulement si, dans toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice représentative M de h (et donc aussi de q par abus) admet des valeurs propres négatives.
> - Si q est définie positive si, et seulement si, dans toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice représentative M de h (et donc aussi de q par abus) admet des valeurs propres strictement positives.
> - Si q est définie négative si, et seulement si, dans toute base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$, la matrice représentative M de h (et donc aussi de q par abus) admet des valeurs propres strictement négatives.

Il est important de constater que les valeurs propres en elles-mêmes peuvent changer selon la base choisie. L'exemple du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base $((1;0;0);(0;2;0);(0;0;3))$ le démontre immédiatement.

La signature

Tout repose sur une propriété qui stabilise les signes des valeurs propres :

> **Propriété** :
> Soit q une forme quadratique définie sur $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$) et h sa forme polaire associée.
> Les signes stricts des valeurs propres de toute matrice M représentant h (et donc q par abus) sont indépendants de la base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ choisie.

En d'autres termes, si q admet pour l'une de ces matrices représentatives k valeurs propres strictement positives et p valeurs propres strictement négatives, alors il en sera de même pour toute autre telle matrice. La valeur $n-k-p$ ne change alors pas, ce qui permet aussi d'en déduire que les valeurs propres nulles sont en nombre indépendant de la base choisie.

Définition (signature d'une forme quadratiqure) Soit q une forme quadratique donnée définie sur $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.
La signature de q est la donnée du nombre k (constant) de valeurs propres strictement positives ainsi que du nombre p (constant) de valeurs propres strictement négatives. On pourra alors noter $sgn(q) = (k; p)$ cette signature.

Des cas particuliers à retenir :
- On observe alors que $k + p = n$ est caractéristique d'une forme quadratique *définie* (ou aussi dite *non-dégénérée*).
- q est définie positive si, et seulement si, $sgn(q) = (n; 0)$
- q est définie négative si, et seulement si, $sgn(q) = (0; n)$
- q est positive si, et seulement si, $sgn(q)$ est de la forme $(k; 0)$
- q est négative si, et seulement si, $sgn(q)$ est de la forme $(0; p)$

On peut dire d'une forme quadratique qu'elle est *alternée* lorsque $sgn(q) = (k; p)$ vérifie $k \neq 0$ et $p \neq 0$. Si, de plus, on a $k + p = n$ alors on parle de forme quadratique non-dégénrée alternée.

Dans le chapitre d'optimisation des fonctions de plusieurs variables, nous aurons besoin de distinguer les cas non-dégénérés alternés, définis positifs, définis négatifs des autres (la connaissance de la signature exacte des autres cas ne sera pas nécessaire).

Exemples : exercice corrigé du TD

On propose une démarche synthétique : le lecteur est invité à détailler les calculs et raisonnements décrits.

13

Exercice $\boxed{1}$ Nous commençons par ne retenir que les matrices symétriques : il reste A, C et H_n. On en cherche maintenant les valeurs propres respectives.

a) La matrice A admet pour valeurs propres 1 et 3 qui sont strictement positives. Si l'on note q_A la forme quadratique associée, il vient que la signature de q_A et $(2; 0)$ faisant de q_A une forme quadratique définie positive.

b) La matrice B n'est pas la matrice d'une forme quadratique.

c) On peut calculer canoniquement $q_C(x; y; z) = {}^tXCX = 2y^2 - 2xy + 2yz + 6xz - 3z^2$ et vérifier, par calcul algébrique, que :

$$q_C(x; y; z) = 2\left(y - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}z\right)^2 - \frac{1}{2}(x - 7z)^2 + 21z^2$$

permettant d'obtenir une signature de $(2; 1)$ en se plaçant dans une base adaptée (à déterminer soi-même). Ainsi, q_C est alternée et non-dégénérée.

h_n) La matrice Attila a un noyau de dimension $n-1$ donc 0 est valeur propre de multiplicité $n-1$.

Comme $H_n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ on obtient n comme dernière vaeur propre.

En conclusion, la forme quadratique associée à H_n (canoniquement) est de signature $(1; 0)$, dégénérée et positive pour $n \geq 2$.