.

Algèbre Bilinéaire

Exercice $\boxed{1}$ Soit $x = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$.

1. On va définir une VAR discrète uniforme sur $X(\Omega) = \{x_1 \dots x_n\}$ de cardinal n et observer que, si l'on devrait traiter des cas où $x_i = x_j$, les valeurs d'espérance, variance et moment quadratiques donnés seraient encore valable.
   On a : $\mathbb{E}[X^2] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} {x_k}^2 = \frac{{x_1}^2 + \dots x_n^2}{n}$ par théorème de transfert.
   De plus, par définition, on a $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} {x_k}^2 = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ d'où, par la formule de Koenig-Huygens :
   $$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] \geq 0 \iff \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{{x_1}^2 + \dots x_n^2}{n} - \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \geq 0$$
   ce qui permet de conclure :
   $$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{{x_1}^2 + \dots x_n^2}{n}$$
2. On peut procéder par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
   On peut aussi choisir d'établir que $| < X|Y > | \leq ||X|| \cdot ||Y||$ pour X et Y deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$ en rappelant que $| < X|Y > | = ||X|| \cdot ||Y|| \times \cos(\widehat{X;Y})$ puis poser $X = \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)$ ainsi que $Y = \left(\sqrt{x_i}\right)$ ou les x_i sont les valeurs strictement positives fournies par l'énoncé.
   Ne reste plus qu'à écrire :$| < X|Y > |^2 = \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{x_i}} \times \sqrt{x_i}\right)^2 = n^2$ d'une part et, d'autre part :
   $$(||X|| \cdot ||Y||) = ||X||^2 \cdot ||Y||^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{x_i}}\right)^2\right) \left(\sum_{k=1}^{n} (\sqrt{x_i})^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \left(\sum_{k=1}^{n} x_i\right)$$
   l'utilisation de l'inégalité fournira alors le résultat attendu.
3. L'ensemble Ω est produit d'intervalles ouverts non bornés donc est un ouvert non borné.
4. Il est clair, par la question 2° que $f(x_1, \dots, x_n) \geq n^2$ pour $(x_1 \dots x_n) \in \Omega$
   Or, $f(1; 1; \dots; 1)) = n^2$ donc f réalise un minimum de n^2 en $(1; 1; \dots; 1) \in \Omega$