Concours 2012

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

L'usage des calculatrices est interdit pour cette épreuve.

Problème 1

On lance deux dés à six faces non pipés (chaque face à la même probabilité d'être tirée), et on note D_1 et D_2 les deux valeurs obtenues, qu'on suppose indépendantes. On note leur somme $S = D_1 + D_2$.

1) Quelle est la probabilité que S soit égale à 12 ? à 6 ? à 1 ?

2) Quelle est la probabilité que S soit paire ? divisible par 4 ? par 9 ?

3) a) Calculez la probabilité de chacun des 3 événements suivants :
   - A : ≪D_1 est paire≫,
   - B : ≪S est paire≫,
   - C : ≪$S \geq 10$≫.

   b) Montrez que A et B sont indépendants.

   c) Montrez que A et C ne sont pas indépendants et calculez la probabilité conditionnelle de C sachant A.

Problème 2

Soit $n > 0$ un entier et L une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On note $\mathrm{Im}(L)$ son image et $\mathrm{Ker}(L)$ son noyau. Pour tout entier $i \geq 1$, on note $L^i = \underbrace{L \circ L \circ \ldots \circ L}_{i \text{ fois}}$ la composée i fois de L.

Première partie

1) Soit $j \geq 1$ un entier, montrez que $\mathrm{Ker}\left(L^j\right) \subset \mathrm{Ker}\left(L^{j+1}\right)$ et $\mathrm{Im}\left(L^{j+1}\right) \subset \mathrm{Im}\left(L^j\right)$. En déduire que $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(L^j\right)\right) \leq \dim\left(\mathrm{Ker}\left(L^{j+1}\right)\right)$.

2) Montrez qu'il existe i un entier positif tel que $\mathrm{Ker}\left(L^i\right) = \mathrm{Ker}\left(L^{i+1}\right)$.

3) Soit donc i un entier tel que $\mathrm{Ker}\left(L^i\right) = \mathrm{Ker}\left(L^{i+1}\right)$.

   a) Montrez que $\mathrm{Im}\left(L^i\right) = \mathrm{Im}\left(L^{i+1}\right)$.

   b) Montrez que pour tout $j \geq i$, $\mathrm{Ker}\left(L^i\right) = \mathrm{Ker}\left(L^j\right)$ et $\mathrm{Im}\left(L^i\right) = \mathrm{Im}\left(L^j\right)$.

Deuxième partie

On dit que L est nilpotente s'il existe un entier positif p tel que $L^p = 0$ et on appelle *indice de nilpotence* le plus petit de ces entiers p.

4) a) Pour $n = 2$, montrez que l'application A définie par :

$$A : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

est nipotente et donnez son indice.

b) Montrez que l'application définie par :

$$B : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

n'est pas nilpotente.

Soit L une application linéaire nilpotente d'indice p.

5) Montrez que pour tout entier positif $k < p$, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(L^k\right)\right) < \dim\left(\mathrm{Ker}\left(L^{k+1}\right)\right)$ et que pour $k \geq p$, $\dim\left(\mathrm{Ker}\left(L^k\right)\right) = n$.

6) a) Montrez que la seule valeur propre d'une application linéaire nilpotente est 0.

b) On suppose que L est une application linéaire dont la matrice dans la base usuelle de $\mathbb{R}^n$ est triangulaire et dont la seule valeur propre est 0. Montrez que L est nilpotente.

c) Donnez dans le cas $n = 3$, un exemple d'application linéaire qui ne possède que 0 comme valeur propre réelle et qui n'est pas nilpotente.

7) a) Soient A et B deux applications linéaires nilpotentes qui commutent, c'est-à-dire telles que $A \circ B = B \circ A$. Montrez que $A + B$ est nilpotente.

b) Proposez deux applications linéaires nilpotentes dont la somme n'est pas nilpotente. On pourra se placer dans le cas $n = 2$.

Problème 3

Première partie

Soit u un réel quelconque et f_u la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f_u(x) = \dfrac{(x-u)^2}{x^2+u^2}$.

1) Que vaut f_0 ?

2) a) Pour $u \neq 0$, montrez que f_u est continue et dérivable.

b) Calculez sa dérivée f'_u.

c) Donnez la limite de $f_u(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

3) a) On suppose $u > 0$. Dressez le tableau des variations de f_u.

b) Mêmes questions pour $u < 0$.

c) Soit u un réel non nul quelconque.

i) Montrez que f_u admet un maximum global unique et donnez sa valeur.

ii) Montrez que f_u admet un minimum global unique et donnez sa valeur.

d) Représentez graphiquement f_1 sur $[-5; 5]$.

Deuxième partie

On note $\mathbb{R}^2_* = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, l'ensemble constitué du complémentaire de l'origine.

Soit g la fonction de deux variables de $\mathbb{R}^2_*$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x,y) = \dfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2}$.

4) Continuité

a) Montrez que g est continue sur $\mathbb{R}_*^2$.
b) Pour $y \in \mathbb{R}$ fixé, calculez la limite de $g(x, y)$ lorsque x tend vers 0.
c) Que vaut la limite de $g(t, t)$ lorsque t tend vers 0 ?
d) En déduire que g ne peut pas être prolongée par continuité en $(x, y) = (0, 0)$.

5) Extrema

a) Vérifiez que g est maximale en tout point de $D_M = \{(x, y) \in \mathbb{R}_*^2\,,\ y = -x\}$.
b) Sur quel ensemble D_m la fonction g est-elle minimale ?
c) Dans le repère cartésien, représentez D_M et D_m.
d) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$ passant par l'origine. Montrez que g est constante sur $D \cap \mathbb{R}_*^2$.

6) Cercle unité

a) Simplifiez $h(t) = g(\cos(t), \sin(t))$.
b) Que vaut h en $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$, $t_3 = \frac{\pi}{2}$, $t_4 = \frac{3\pi}{4}$ et $t_5 = \pi$?
c) Sur le graphique précédent, tracez le cercle unité et indiqué les valeurs de g correspodant à t_1, t_2, t_3, t_4 et t_5.

Problème 4

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(m)$ dont la densité est donnée par :

$$f_m(x) = m\mathrm{e}^{-mx}\,,\ \text{pour } x \geq 0.$$

1) Calculez la fonction de répartition F_m de X.

2) Montrez que F_m est inversible et calculez son inverse F_m^{-1}.

3) On pose $Y = F_m(X)$.

a) Pour $t \in [0, 1[$, puis pour t un réel quelconque, calculez la probabilité que Y soit inférieure à t : $\mathbb{P}(Y \leq t)$.
b) En déduire la densité de Y. Quelle est la loi de Y ?

4) a) Montrez que l'on peut simuler un tirage x_i de la loi $\mathcal{E}(m)$ à partir d'un tirage u_i de loi uniforme sur $[0; 1]$.
b) Montrez que l'on peut simuler la moyenne arithmétique de n tirages $(x_1, \ldots, x_n)$ de la loi $\mathcal{E}(m)$ à partir de la moyenne géométrique $\prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{(u_i)}$ de n tirages $(u_1, \ldots, u_n)$ de la loi uniforme sur $[0; 1]$.