Le problème : Intégrales de Wallis

On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, une *intégrale de Wallis* par :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)dx$$

Partie I : Etude

1. Démontrer que les intégrales de Wallis valident la relation de récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}/\{0;1\} \;\; nI_n = (n-1)I_{n-2}$
2. Caluler les valeurs de I_0 et I_1
3. Cas $n = 2p$ pair :
   (a) Démontrer que dans ce cas, on a : $I_n = \dfrac{(n-1)(n-3)\ldots 1}{n(n-2)\ldots 2} \times \frac{\pi}{2}$
   (b) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p \cdot p!)^2} \cdot \frac{\pi}{2}$
4. Cas $n = 2p+1$ impair :
   (a) Démontrer que dans ce cas, on a : $I_n = \dfrac{(n-1)(n-3)\ldots 2}{n(n-2)\ldots 3}$
   (b) En déduire que : $\forall p \in \mathbb{N} \quad I_{2p+1} = \dfrac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p+1)!}$
5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_{n+1}}{I_n}$. En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} I_n = 1$

Partie II : Applications

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $u \in]-n;n[$ on a $\left(1+\dfrac{u}{n}\right)^n \leq e^u \leq \left(1-\dfrac{u}{n}\right)^{-n}$
2. En déduire que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{x^2}{n}\right)^n dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leq \int_0^{\sqrt{n}} \left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{-n} dx$$
3. En utilisant convenablement les changements de variables $x = \sqrt{n}\sin t$ et $x = \sqrt{n}\tan t$ dans l'encadrement qui précède, en déduire :
$$\sqrt{n} \cdot I_{2n+1} \leq \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leq \sqrt{n} \cdot I_{2n-2}$$
4. Conclure en donnant la valeur de $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^n e^{-x^2}dx$.
   Etablir un lien avec un résultat connu (de probabilités)