Vecteurs aléatoires

Couples de VAR

Exercice $\boxed{1}$ On lance un premier dé ordinaire (à six faces) et on note X la variable aléatoire associée à son résultat.
On lance ensuite un dé à X faces supposé non truqué et on note Y la variable associée à son résultat.

1. Décrire la loi du couple $(X;Y)$
2. Déterminer la loi conditionnelle de Y sachant $[X = x]$
3. Déterminer les lois marginales $\mathbb{P}_X$ de X ainsi que $\mathbb{P}_Y$ de Y
4. Calculer $\mathbb{E}[XY]$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice $\boxed{2}$ Soient X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(q)$. On définit $M = \max(X;Y)$ et $N = \min(X;Y)$.

1. Déterminer les lois des variables aléatoires M et N.
2. Déterminer la loi du couple $(M;N)$.
3. Déterminer $Cov(M;N)$. Les variables aléatoires M et N sont-elles indépendantes ?

Exercice $\boxed{3}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{U} = [\![1;n]\!]^2$ et on définit $(X;Y)$ couple de VAR en posant :

$$\forall (p;q) \in \mathcal{U} \quad \mathbb{P}[(X;Y) = (p;q)] = \frac{1}{n^2}$$

1. Déterminer les lois marginales de X et Y.
2. Calculer $\mathbb{E}[XY]$ et $Cov(X;Y)$. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice $\boxed{4}$ (*D'après ESC 2010 voie T*) On dispose d'un dé cubique ordinaire ainsi que d'une pièce non truquée. On lance le dé et on observe son résultat :

- Si celui-ci est un 6, on lance deux fois la pièce.
- Sinon, on lance la pièce une seule fois.

On désignera par X la valeur obtenue sur le dé et par Y le nombre de *Pile* obtenu.

1. Décrire complètement la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Etablir que $\mathbb{P}[Y = 2] = \frac{1}{24}$
3. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=k]}[[Y = 0]$ pour $k \leq 5$. Que vaut $\mathbb{P}_{[X=6]}[Y = 0]$?
4. Donner la loi (marginale) de Y et calculer son espérance.
5. Dresser le tableau de la loi du couple $(X;Y)$.
6. Calculer $Cov(X;Y)$.

Exercice $\boxed{5}$ On dispose de deux équilibrés : l'un à 4 faces et l'autre à 6 faces.
On définit deux expériences aléatoires :

- $(\mathcal{E})$: On lance simultanément les deux dés jusqu'à obtention d'un double 1.
- $(\mathcal{F})$: On lance le dé à 4 faces jusqu'à obtention d'un 1, puis effectue de même avec le dé à 6 faces.

1. On désigne par X le nombre total de lancers effectués associés à l'expérience $(\mathcal{E})$.
   Déterminer complètement la loi de X et indiquer son espérance et sa variance.
2. On désigne par Y le nombre total de lancers effectués associés à l'expérience $(\mathcal{F})$. On définit alors T le nombre de fois où le dé à 4 faces (tétrahèdre) est lancé ainsi que C le nombre de fois où le dé à 6 faces (cube) est lancé.
   (a) Ecrire une équation reliant T, C et Y.
   (b) Déterminer les lois de T et C. Ces deux variables sont-elles indépendantes ?

(c) Justifier que l'on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \mathbb{P}[Y = k] = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}[T = i]\mathbb{P}[C = k - i]$$

(d) En déduire la loi de Y et en calculer son espérance.

Exercice $\boxed{6}$ *D'après ESCP 2013 voie T* On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient trois boules rouges et deux boules vertes, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et quatre boules vertes.

On choisit une des deux urnes au hasard (disons à pile ou face), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne. On applique ensuite la méthode suivante :

- si la boule est rouge, on effectue au second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$;
- si la boule est verte, on effectue au second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$;

On notera X_1 et X_2 les variables aléatoires de Bernoulli valant respectivement 1, si la première boule tirée est rouge (X_1), si la seconde boule tirée est rouge (X_2). On pose $Z = X_1 + X_2$.

1. Décrire complètement la loi de X_1 et donner son espérance et sa variance.
2. Vérifier que $\mathbb{P}\left([X_2 = 0] \cap [Z = 0]\right) = \frac{12}{25}$
3. Dresser le tableau de la loi du couple $(X_2; Z)$
4. Déterminer complètement la loi de X_2 et donner $\mathbb{E}[X_2]$ et $\mathbb{V}[X_2]$
5. Les variables X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
6. Donner la loi de Z, calculer son espérance et montrer que $\mathbb{V}[Z] = \dfrac{414}{625}$
7. Le but de cette question est d'obtenir la variance de Z par une autre méthode.
   (a) Calculer $\mathbb{E}[X_2 Z]$
   (b) Montrer que $Cov(X_2; Z) = \frac{204}{625}$. En déduire $Cov(X_1; X_2)$.
   (c) Conclure

Exercice $\boxed{7}$ $\bullet\Theta^{\mathrm{C}\sharp}$ Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1; 3]\!])$ supposées indépendantes.
Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $Z = XY$. Quelle est la probabilité que Z soit paire ?

Exercice $\boxed{8}$ **RàR** Soient X et Y, variables aléatoires réelles indépendantes, définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$

1. Démontrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$
2. Démontrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n; p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(k; p)$, avec $(n; k) \in \mathbb{N}^2$ et $p \in]0; 1[$, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n + k; p)$

Exercice $\boxed{9}$ On se donne un entier $k \geq 1$. Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes vérifiant :

$$\forall i \in [\![1; k]\!]\ \forall j \in [\![1; i]\!] \quad \mathbb{P}[(X; Y) = (i, j)] = \frac{2}{k(k+1)}$$

de sorte que le support de $(X; Y)$ soit $\{(i; j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq j \leq i \leq k\}$

1. Vérifier que l'on a ainsi défini une loi de probabilité pour le couple $(X; Y)$.
2. Déterminer la loi conditionnelle de X (sachant $[Y = j]$)
3. Déterminer la loi conditionnelle de Y (sachant $[X = i]$)
4. On définit l'espérance *conditionnelle* de X sachant $[Y = j]$ par :

$$\mathbb{E}[X \mid Y = j] = \sum_{x \in X(\Omega)} x\mathbb{P}[X = x \mid Y = j]$$

   Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y = j]$ pour $j \in [\![1; k]\!]$ fixé.
5. De la même façon, déterminer $\mathbb{E}[Y \mid X = i]$ pour $i \in [\![1; k]\!]$ fixé.

Vecteurs Aléatoires

Exercice 10 On considère un sachet opaque contenant n pièces indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. On effectue $p \leq n$ tirages successifs, avec remise, et on note X_k la variable de Bernoulli qui vaut 1 lorsque le $k^{\text{ième}}$ tirage apporte le numéro k (avec $k \leq p$).

1. Les variables aléatoires X_1 ; ... ; $X_n)$ sont-elles mutuellement indépendantes ? De même loi ? Justifier.
2. On définit à présent $S = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} X_k$.
   (a) Déterminer $S(\Omega)$
   (b) Démontrer que, pour m entier naturel donné, $[S = m]$ est réalisé si, et seulement si, le nombre d'événements du type $[X_k = k]$ vaut exactement m.
   (c) En déduire la loi de S
3. On joue maintenant à un jeu dans lequel, à l'issue de cette expérience, on gagne k euros chaque fois que le tirage numéro k amène la pièce numéro k.
   Combien devrait-on demander comme mise à ce jeu pour le rendre équitable ?

Exercice 11 Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On prélève une boule au hasard (équiprobable) et on relève sa couleur. On replace alors cette boule dans l'urne, ainsi que c boules de cette même couleur (avec $c \in \mathbb{N}^*$ fixé). Cette épreuve est répétée n fois, avec $n \geq 3$ entier naturel donné.
On définit enfin, pour chaque $i \leq n$ une variable aléatoire X_i de Bernoulli, associée au succès *une boule blanche est obtenue au* i^{eme} *tirage* et on notera $Z_p = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} X_i$.

1. Déterminer la loi du couple $(X_1; X_2)$ et en déduire la loi (marginale) de X_2.
2. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
3. Donner $Z_p(\Omega)$
4. On se donne $p \in [\![2\ ;\ n-1]\!]$.
   (a) Déterminer, pour $k \in Z_p(\Omega)$, la valeur de $\mathbb{P}_{[Z_p=k]}[X_{p+1} = 1]$
   (b) Etablir que :
   $$\mathbb{P}[X_{p+1} = 1] = \frac{1 + c\,\mathbb{E}[Z_p]}{2 + pc}$$
   (*Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales*)
5. Démontrer enfin que :
   $$\forall p \leq n \quad \mathbb{P}[X_p = 1] = \mathbb{P}[X_p = 0] = \frac{1}{2}$$

Exercice 12 **Lois d'additivité des Poissons**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X = (X_1\ ;\ \dots\ ;\ X_n)$ vecteur aléatoire où les X_i sont des VAR définies sur un même espace probabilisé, mutuellement indépendantes et de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda_i)$.
Déterminer la loi de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$

Suites de VAR et convergence

Exercice 13 On se donne une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes suivant une même loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0; 1[$.

1. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, les valeurs de $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{V}[X_n]$.

2. Pour $m \in \mathbb{R}$ fixé, on pose ensuite $Y_0 = 0$ (variable certaine) puis, par récurrence :

$$\forall n \geq 1 \quad Y_n = \frac{1}{2} Y_{n-1} + X_n - m$$

   (a) Etablir que, pour tout $n \geq 1$ on a :
$$Y_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X_{n-k} - m}{2^k}$$
   (b) Déterminer l'espérance et la variance de Y_n, pour $n \geq 1$.
   (c) Calculer enfin $Cov(Y_n; Y_{n+1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{\textbf{14}}$ Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre $p \in]0;1[$, supposées indépendantes. On se donne également $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On définit enfin $Y = \mathbb{1}_{\{N\neq 0\}} \times \displaystyle\sum_{k=1}^{N} X_k$

1. Quelle est la loi de $S_r = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} X_k$ pour $r \in \mathbb{N}^*$ fixé ?
2. Déterminer $\mathbb{P}[Y = 0]$ puis calculer, pour $r \in \mathbb{N}^*$, la valeur de $\mathbb{P}[Y = r]$
3. Déterminer l'espérance de Y en précisant sa condition d'existence.

Exercice $\boxed{\textbf{15}}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ *Résultats de base des anciens programmes (jusqu'en 2022)*

Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ admettant un moment d'ordre 1.

1. Démontrer que, pour tout $A \in \mathcal{A}$, la fonction indicatrice $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire de l'espace $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ et qu'elle admet une espérance et une variance. Que vallent alors $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A]$ et $\mathbb{V}[\mathbb{1}_A]$?
2. Etablir l'inégalité de Markov $\mathbb{P}[X \geq \lambda] \leq \dfrac{\mathbb{E}[X]}{\lambda}$ vérifiée pour si X est positive, avec$\lambda > 0$.
3. Démontrer que, pour X (à densité ou discrète) on a : $\forall \lambda > 0 \ \ \mathbb{P}[|X| \geq \lambda] \leq \dfrac{\mathbb{E}[|X|]}{\lambda}$
4. Etablir que, pour X à densité ou discrète, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathbb{P}[X > x] = 0$
5. Prouver enfin l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff, valable pour toute variable aléatoire X admettant une espérance et un moment quadratique : $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \dfrac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$

Exercice $\boxed{\textbf{16}}$ *Un exemple de convergence*
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne X_n une variable aléatoire définie par : $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}[X_n = n] = \frac{1}{n}$

1. A-t-on que (X_n) converge en probabilités vers la variable aléatoire certaine $\mathbb{1}$ lorsque n tend vers $+\infty$?
2. A-t-on que (X_n) converge en probabilités vers la variable aléatoire certaine O lorsque n tend vers $+\infty$?
3. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n]$ puis comparer avec l'espérance de la variable $\mathbb{1}$.

Exercice $\boxed{\textbf{17}}$ On se done $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}[\![1\ ;\ n-1]\!]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
Etablir que $\left(\frac{1}{n}X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire U suivant la loi $\mathcal{U}[0;1]$.