.

Couples de VAR : introduction

Nous proposons ici une introduction au formalisme des couples de VAR, sans pour autant se lancer dans une étude complète. La maitrise des notions de se document peut attendre le réinvestissement des variables alétoires étudiées en seconde année.

Une reformulation de notions connues

Soient X et Y deux VAR définies sur un même espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. La notation $(X;Y)$ est employée pour désigner le *couple* de VAR induit par X puis Y et l'on peut simplement écrire que :

$$[(X;Y)=(x;y)] \quad = \quad [X=x]\cap[Y=y]$$

Toutes les autres notations usuelles se transmettent via l'intersection d'événements, de façon très générale on a alors :

$$(X;Y)\in A\times B \quad = \quad [X\in A]\cap[Y\in B]$$

Avec $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$. On en déduit *pour le cas discret* une écriture de la loi du couple $(X;Y)$ comme étant la donnée des probabilités élémentaires :

$$\text{loi de } (X;Y) : \quad \left(\mathbb{P}[(X;Y)=(x;y)]\right)_{\substack{x\,\in\,X(\Omega)\\ y\,\in\,Y(\Omega)}} \quad = \left(\mathbb{P}([X=x]\cap[Y=y])\right)_{\substack{x\,\in\,X(\Omega)\\ y\,\in\,Y(\Omega)}}$$

On peut alors résumer ces valeurs, dans le cas fini, à l'aide d'un tableau (et ainsi une matrice de loi est envisageable) en notant $p_{lk}=\mathbb{P}[(X;Y)=(x_l;y_k)]$ avec $X(\Omega)=\{x_1;\ldots;\ x_m\}$ et $Y(\Omega)=\{y_1;\ldots;\ y_n\}$:

	y_1	$\ldots$	y_k	$\ldots$	y_n
x_1	p_{11}		$\cdots$		p_{1n}
$\vdots$		$\ddots$			
x_l	$\vdots$		p_{lk}		$\vdots$
$\vdots$				$\ddots$	
x_m	p_{m1}		$\cdots$		p_{mn}

En particulier :

$$\sum_{(l;k)\in[\![1;m]\!]\times[\![1;n]\!]} p_{lk} \;=1$$

De plus, on peut observer que l'étude du couple $(X;Y)$ se transmet très naturellement à celle du couple $(Y;X)$.

Propriété : Dans le cas où X et Y sont discrètes, on a, pour tout $y\in Y(\Omega)$ fixé :

$$(*) \quad \mathbb{P}[Y=y]=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}[X=x]\times\mathbb{P}_{[X=x]}[Y=y]=\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}[X=x]\times\mathbb{P}_{[X=x]}((X;Y)=(x;y))$$

On écrira un résultat analogue en intervertissant les rôles de X et de Y. On peut alors noter qu'on obtient la convergence des séries de la forme $\sum_{x\in X(\Omega)}\mathbb{P}[X=x]\times\mathbb{P}_{[X=x]}[(X;Y)=(x;y)]$ et résultat analogue en intervertissant les rôles de X et Y.

Cas de la somme de VAR

Nous cherchons à exprimer l'événement “$X+Y$ *vaut* x_i+y_j *avec* x_i *obtenu pour* X *et* y_j *obtenu pour* Y" afin de démontrer la linéarité de $\mathbb{E}$.

Nous pensons avoir à écrire $[X+Y=x_i+y_j]$ par commodité mais ce n'est pas l'usage habituel : aussi surprenant que cela puisse paraître, l'événement cherché est en fait tout simplement $(X;Y)=(x_i;y_j)$. En effet :

- Supposons que $(X;Y)=(x_i;y_j)$ soit réalisé. Alors la seule valeur réelle possible pour $X+Y$ est bien x_i+y_j.
- Supposons que $X+Y$ vaille x_i+y_j, avec x_i obtenu pour X et y_j obtenu pour Y. En particulier, comme on a obtenu x_i pour X l'événement $[X=x_i]$ est réalisé. Mais il est donc de même pour $[Y=y_j]$ Donc $[X=x_i]\cap[Y=y_j]$ est réalisé. Mais nous avons introduit $[(X;Y)=(x_i;y_j)]$ comme nouvelle notation de cet (intersection d') événement.

Application : linéarité de $\mathbb{E}$ Nous pouvons donc d'écrire l'espérance d'une somme ainsi :

$$\mathbb{E}[X+Y] = \sum_{(i;j)\in I\times J} (x_i+y_j)\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)]$$

avec $X(\Omega)=\{x_i\,;i\in I\}$ et $Y(\Omega)=\{y_j\,;\,j\in J\}$. Finalement, la preuve s'écrit (sans peine sur le fond) :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X+Y] &= \sum_{(i;j)\in I\times J} x_i\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] + y_j\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \;+\; \sum_{j\in J}\sum_{i\in J} y_j\mathbb{P}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} x_i\mathbb{P}[Y=y_j]\times\mathbb{P}_{[Y=y_j]}((X;Y)=(x_i;y_j)) \;+\; \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} y_j\mathbb{P}[X=x_i]\times\mathbb{P}_{[X=x_i]}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I} x_i\sum_{j\in J}\mathbb{P}[Y=y_j]\times\mathbb{P}_{[Y=y_j]}((X;Y)=(x_i;y_j)) \;+\; \sum_{j\in J} y_j\sum_{i\in I}\mathbb{P}[X=x_i]\times\mathbb{P}_{[X=x_i]}[(X;Y)=(x_i;y_j)] \\
&= \sum_{i\in I} x_i\mathbb{P}[X=x_i] \;+\; \sum_{j\in J} y_j\mathbb{P}[Y=y_j] \quad \text{d'après } (*) \\
&= \mathbb{E}[X] \;+\; \mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

Notation : On écrira $[X+Y=s]$ avec $s\in\mathbb{R}$ pour désigner l'ensemble $\{w\in\Omega \mid X(w)+Y(w)=s\}$.
De cette façon, l'événement est *indépendant* de la façon de décrire le réel s.

Ainsi, écrire $[X+Y=x_i+y_j]$ devient complètement désuet : en pratique, on calcule simplement $s=x_i+y_j$ et on s'intéresse à $[X+Y=s]$.
Dans le cas où l'on serait intéressé par l'obtention de la somme x_i+y_j amenée d'une façon spécifique par X et Y, on écrit simplement $[(X;Y)=(x;y)]$ comme vu précéde mment.

Bilan :
— Si l'on s'intéresse à une (ou plusieurs) façon précise d'obtenir une certaine somme, on étudie le *couple* $(X;Y)$
— Si l'on s'intéresse au résultat d'une somme, indépendamment de la façon dont les VAR l'ont réalisée, on étudie l'événement $[X+Y=s]$
— Dans tous les cas, on évite $[X+Y=x+y]$ comme ça, pas d'ambiguïté !

Exemple : Soient $X=D6$ et $Y=D4$ deux lancés indépendants de dés (équilibrés) à (respectivement) six et quatre faces.

1. On cherche la probabilité que la somme des dés amène 6 en ayant fait 4 sur l'un des dés. C'est un cas d'étude de couple :

   $$\mathbb{P}[(X;Y)\in\{(4;2)\,;\,(2;4)\}] = \mathbb{P}[(X;Y)=(4;2)]+\mathbb{P}[(X;Y)=(2;4)] = \mathbb{P}([X=4]\cap[Y=2])+\mathbb{P}([X=2]\cap[Y=4]) = \frac{1}{12}$$

   On remarque que la valeur somme de 6 n'apparait nulle part au travers du calcul ($4+2=6$ est implicite)

2. On cherche la probabilité que la somme des dés amène 4 : c'est un cas d'étude de somme que l'on décompose en couples :

   $$\mathbb{P}[X+Y=4] = \mathbb{P}[(X;Y)=(1;3)]+\mathbb{P}[(X;Y)=(2;2)]+\mathbb{P}[(X;Y)=(3;1)] = \frac{1}{8}$$

   Les écritures de décomposition $1+3=4$, $2+2=4$ et $3+1=4$ sont alors implicitement contenues dans les couples.

Autres opérations : Les mêmes remarques s'appliquent à d'autres opérations comme, par exemple, le **produit**.
On peut donc définir $[XY=r]=\{w\in\Omega\,;\;X(w)\times Y(w)=r\}$ pour calculer $\mathbb{P}[XY=r]$ et utiliser l'étude du couple $(X;Y)$ pour amener un produit particulier, lorsque la répartitions au sein des facteurs est connue.