Séries et VAR

Séries

Exercice $\boxed{1}$ la série harmonique

On définit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Etablir que $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\, dt \leq \frac{1}{k}$ puis calculer la valeur de cette intégrale, pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que $H_n \geq \ln n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
3. Démontrer ainsi que (H_n) diverge.

On pourra retenir que la série dite *Harmonique* s'écrivant $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ est *divergente*

Exercice $\boxed{2}$ Convergence des séries sub-harmoniques

On pose $\alpha > 1$ réel et on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Justifier que la suite (S_n) est croissante.
2. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire la convergence, puis la valeur de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ lorsque $\alpha > 1$
4. En étudiant les intégrales $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$, démontrer que (S_n) converge.
5. En déduire que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs vérifiant :

$$\exists \alpha > 1 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \;\; \forall n \geq n_0 \;\; u_n \leq n^{-\alpha}$$

   la série de terme général u_n converge.

Exercice $\boxed{3}$ Divergence des séries super-harmoniques

On pose $\alpha < 1$ réel et on définit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Calculer la valeur de $\displaystyle\int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt = +\infty$ lorsque $\alpha < 1$
3. En étudiant les intégrales $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$, démontrer que (S_n) diverge.
4. En déduire que, pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs vérifiant :

$$\exists \alpha < 1 \;\; \exists n_0 \in \mathbb{N}^* \;\; \forall n \geq n_0 \;\; u_n \geq n^{-\alpha}$$

   la série de terme général u_n diverge.

Info : On appelle *critère de Riemann* le critère donnant la convergence (ou la divergence) d'une série se ramenant à $\sum \frac{1}{n^\alpha}$: la synthèse des exercices précédents fournissent ce critère.

Exercice $\boxed{-\dfrac{1}{12}}$ *Pour prendre conscience*

On notera $S(x)$ la valeur réelle obtenue lorsque la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ converge. Les sommes partielles $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ seront notées $S_n(x)$ et enfin, la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sera notée f.

1. Rappelez la nature de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$ en fonction de $x \in \mathbb{R}$. Comparez avec le domaine de définition réel de f.
2. Calculer $S(0.1)$. Que représentent les sommes partielles $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ pour $x = 0.1$?
3. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la somme $S_n(x)$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. Que vaut $S_n(10)$ en fonction de n ?
4. Calculer $f(10)$. De façon générale, quel est le signe de $f(x)$ pour $x > 1$?
5. Déterminer le signe de $S_n(x)$ pour $x > 1$ et $n \in \mathbb{N}$.
6. *Si* $(S_n(x))$ convergeait, pour $x > 1$, que pourrait-on alors dire de sa limite ? Conclure.

Exercice $\boxed{\sum}$ Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants :

1. $u_n = e^{\sqrt{n}}$
2. $u_n = \dfrac{n^2-5}{n(2n+1)}$
3. $u_n = \dfrac{n-2}{2^n-1}$
4. $u_n = \dfrac{5n^2+10n+12}{3^n-2^n}$
5. $u_n = n\sin\left(\dfrac{1}{3^n}\right)$
6. $u_n = \dfrac{n}{n+1}$
7. $u_n = \dfrac{\cos(n!)}{3^n+\cos(n!)}$
8. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

Exercice $\boxed{\sum!}$ Déterminer la nature de la série de terme général u_n dans chacun des cas suivants, puis calculer la valeur de la somme :

1. $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$
2. $u_n = \dfrac{6}{5^{n+2}}$
3. $u_n = \dfrac{2n(n+1)}{3^n}$
4. $u_n = (-1)^n\dfrac{n^2+3}{5^n}$
5. $u_n = (-1)^n\dfrac{2^n}{(n+1)!}$
6. $u_n = \dfrac{n^2+n+1}{n!}$
7. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^3}{(n+2)(n-1)^2)}\right)$
8. $u_n = \dfrac{\binom{n}{k}}{n!}$; $k \in \mathbb{N}^*$ fixé

Variables Aléatoires Discrètes

Exercice $\boxed{\mathbf{4}}$ On considère un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$. Le système d'événements (A_n) est considéré comme étant consitué d'événements disjoints deux à deux. On pose $a_n = \mathbb{P}(A_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
Dans chacun des cas qui suit, dire s'il est possible de choisir la suite $(a_n)_{n\geq n_0}$ proposée,en justifiant (les événements A_k pour $k < n_0$ seront alors traités comme négligeables par convention) :

1. On prend $a_n = \dfrac{n-1}{n!}$ avec $n_0 = 1$
2. On prend $a_n = \dfrac{(-1)^n(2^{2n+1})}{(2n)!}$ avec $n_0 = 2$.
3. On prend $a_n = p(1-p)^n$ avec $n_0 = 1$
4. On prend $a_n = n2^{-n}$ pour $n_0 = 4$

Cas discret infini : généralités

Exercice $\boxed{5}$ Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série absolument convergente à termes réels non tous nuls.

1. Justifier qu'il existe une variable aléatoire X sur un certain espace probabilisé et une constante $c > 0$ telle que la loi de X soit donnée par :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = k] = c|u_k|$$
2. On considère la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}(n^2 + 1)\lambda^n$ où $\lambda \in] - 1; 1[$.
justifier que cette série converge absolument.
3. Justifier l'existence de X variable aléatoire sur un certain espace de probabilisé pour laquelle il existe une constante $c > 0$ telle que :
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[X = k] = c(k^2 + 1)|\lambda|^k$$
Déterminez ensuite la constante c.
4. Calculer $\mathbb{E}[X]$ après en avoir justifié l'existence.
5. Décrire une expérience aléatoire pouvant être modélisée par la variable aléatoire X.

Exercice $\boxed{6}$ **D'après EML - 2014 voie E**

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 2}$ de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ et dont les lois (indépendantes) respectives sont données par :

$$\forall n \geq 2 \forall k \in [\![2; n + 1]\!] \quad \mathbb{P}[X_n = k] = \frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$$

1. Vérifier que, pour tout $n \geq 2$ on a bien $\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}[X_n = k] = 1$
2. Démontrer que, pour tout $k \geq 2$ fixé on a $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}[X_n = k] = \frac{k-1}{k!}$
3. Démonter que la série $\sum_{k\geq 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.

   On admettra alors qu'il existe une variable aléatoire Z vérifiant $Z(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$ et pour laquelle $\mathbb{P}[Z = k] = \frac{k-1}{k!}$
4. Etablir la convergence de la série $\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}[Z = k]$ et en calculer sa valeur.
5. Comparer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n]$ avec $\mathbb{E}[Z]$.

   Indication : On pourra vérifier que $\mathbb{P}[X_n > k] = \frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$

Exercice $\boxed{7}$ Soit $p \in]0; 1[$. On suppose que la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifie : $\forall n \in \mathbb{N}^* \;\; F(n) = 1 - (1 - p)^n$ Donner la loi de X.

Cas discret infini : avec les lois de référence

Exercice $\boxed{8}$ **les petits chevaux** Au jeu des petits chevaux, on lance un $D6$ à chaque tour jusqu'à obtention d'un 6 permettant de faire sortir son premier cheval de l'écurie et, pour ainsi dire, de débuter le jeu à proprement parler.

On note T le nombre de tours écoulés au moment de la sortie du premier cheval.

Quelle est la loi de T ? Déterminer $\mathbb{E}[T]$ et $\mathbb{V}[T]$.

Exercice $\boxed{9}$ Une variable aléatoire N définie sur un espace probabilisé suit une loi de Poisson de paramètre 5.

X désigne une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé. Enfin, on pose $Y = N - X$. On suppose enfin que N, X, Y sont à valeurs entières positives et que pour tout $(n;k) \in \mathbb{N}^2$, si $k \leq n$ alors :

$$\mathbb{P}_{[N=n]}[X = k] = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{n-k}$$

1. Démontrer que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1)$
2. Déterminer la loi de Y
3. Pour tout $(k;j) \in \mathbb{N}^2$, calculer $\mathbb{P}[X = k \cap Y = j]$ et comparer avec la valeur de $\mathbb{P}[X = k] \times \mathbb{P}[Y = j]$

Exercice $\boxed{10}$ Soit $\theta > 0$ fixé. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)$.

On définit $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Démontrer que Y admet un espérance puis la déterminer.

Exercice $\boxed{11}$ *Polynôme à racines aléatoires*

On se donne une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la probabilité que $P(t) = t^2 - 2Xt + X$ ademtte des racines réelles distinctes.
2. On note S l'abscisse du sommet de la parabole représentant la fonction P. Quelle est la valeur de $\mathbb{E}[S]$?
3. Peut-on choisir λ pour que la probabilité que cette même parabole passe par le point de coordonnées $(X;X)$ excède 50% ?

Exercice $\boxed{12}$ *Qu'est-ce qu'un entier aléatoire ?*

On considère une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisable $(\Omega\ ;\ \mathcal{A})$ telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$.

On notera p_k la valeur de $\mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$.

1. Justifier que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0$ et en déduire qu'il n'existe pas de loi de probabilité uniforme sur $\mathbb{N}$
2. Que pensez-vous de la phrase *" on tire un entier aléatoire"* ?
3. Vérifier que X *est pair* constitue bien un événement et en déduire que X *est impair* également.
   On notera $[X \in 2\mathbb{N}]$ et $[X \in 1 + 2\mathbb{N}]$ respectivement ces deux événements.
   (a) On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p > 0$.
   Existe-il une valeur de λ pour laquelle $\mathbb{P}[X \in 2\mathbb{N}] = \mathbb{P}[X \in 1 + 2\mathbb{N}]$?
   (b) On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   Existe-il une valeur de λ pour laquelle $\mathbb{P}[X \in 2\mathbb{N}] = \mathbb{P}[X \in 1 + 2\mathbb{N}]$?
4. Bernard, Polytechnicien, déclare :

   "Un groupe de personnes se présente, sans que l'on puisse connaître à l'avance le nombre d'individus. La probabilité d'obtenir un nombre pair de personnes est forcément $\dfrac{1}{2}$*"*

   Que pensez-vous de cette allégation ?