.

Suites et Sommations

Sommes (rappels)

Nous proposons dans cette section une synthèse des manipulations employées ou évoquées lors d'exercices ou d'exemples.

Dans toute la suite, les lettres n, a et b désignent des entiers naturels avec $a \leq b$ et les écritures u_k, v_k, u_i etc... renvoient à des termes de suites numériques (réelles).

• Aspect récurrent

Lorsque $n \geq a$ on a :

$$\boxed{S_n = \sum_{k=a}^{n} u_k \implies S_{n+1} = u_{n+1} + S_n}$$

• Linéarité

Se décline en deux aspects :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b}(u_k + v_k) = \sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=a}^{b} v_k} \qquad \boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \sum_{k=a}^{b} \lambda u_k = \lambda \sum_{k=a}^{b} u_k}$$

- **Changement / glissement d'indices**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=0}^{b-a} u_{a+k}}$$

- **Invariance du choix d'indice (libre)**

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{i=a}^{b} u_i = \sum_{j=a}^{b} u_j = \dots}$$

⚠Attention ! Vous ne pouvez pas employer une lettre déjà prise dans l'expression, ainsi $v_n + \sum_{n=a}^{b} u_n$ ou encore $\sum_{n=0}^{n} u_n$ sont des exemples d'écritures à proscrire.

- **Regroupement/séparation de termes**
Lorsque $n > b \geq a$, on peut écrire :

$$\boxed{\sum_{k=a}^{b} u_k + \sum_{k=b+1}^{n} u_k = \sum_{k=a}^{n} u_k}$$

On peut aussi parler de *relation de Chasles*

- **Renversement / Symétrie**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}}$$

Peut aussi être généralisé : $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} u_k = \sum_{k=a}^{b} u_{(b+a)-k}$

Un exemple

Donnons-nous la somme connue $S_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Nous allons donc calculer :

$$\begin{aligned}
S_n = \sum_{k=0}^{n} k &= \sum_{k=0}^{n} (n-k) \quad \text{(renversement)} \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= \sum_{k=0}^{n} k \ + \sum_{k=0}^{n} (n-k) \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= \sum_{k=0}^{n} (k + n - k) \quad \text{(linéarité)} \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= \sum_{k=0}^{n} n \\
\Rightarrow \ 2 \times S_n &= n \times \sum_{k=0}^{n} 1 = n(n+1) \quad \text{(linéarité)}
\end{aligned}$$

où l'on comprendra que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ fois}} = n + 1$

A retenir : sommes particulières

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :
$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \quad ; \quad 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
2. Pour tout $q \neq 1$ on a :
$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$
3. Si x est une constante réelle :
$$\sum_{k=a}^{b} x = (b - a + 1)x$$

Pour finir :

Ne pas hésiter à développer les Σ avec les $+ \ldots +$ pour bien comprendre les formules.

Donnons la formule de renversement $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$, elle cache juste l'égalité :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n \quad = \quad u_n + u_{n+1} + u_{n-2} + \cdots + u_2 + u_1 + u_0$$

.

Séries

Nous proposons une synthèse des connaissances essentielles sur les séries. Dans tout ce qui suit, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle (numérique) et a est un entier naturel. En pratique, on aura souvent $0 \leq a \leq 2$.

Définition : La suite $\left(\sum_{k=a}^{n} u_k\right)_{n\geq a}$ est appelée *série* de terme général u_k. On la note plus facilement $\sum_{n\geq a} u_n$.
a est alors un entier naturel (le rang initial) et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique (éventuellement définie à partir de a).

Vocabulaire : Les termes $\sum_{k=a}^{n} u_k$ sont appelés *sommes partielles* de la série $\sum_{k\geq a} u_k$.

Définition : La série $\sum_{n\geq a} u_n$ converge signifie que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=a}^{n} u_k$ est un réel S (non infini).
Ceci revient à dire que la suite des sommes partielles converge dans $\mathbb{R}$.

Vocabulaire : On appelle *somme d'une série* $\sum_{k\geq a} u_k$ la valeur réelle finie $S = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq a}^{n} u_k$.
On note plus facilement $\sum_{k=a}^{+\infty} u_k$ la valeur de somme d'une série.

Propriété : [condition nécessaire de convergence] <u>Si</u> une série $\sum_{n\geq a} u_n$ converge <u>Alors</u> $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
Remarque : La réciproque est en générale fausse, prendre la série harmonique comme contre-exemple.

Propriété : [Structure] L'ensemble des séries convergentes à termes généraux réels est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de ses opérations usuelles.
On a donc stabilité par combinaisons linéaires

Séries Particulières

Séries géométriques (et leur descendance)

Vocabulaire : Toute série de la forme $\sum_{n\geq 0} x^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée *série géométrique*

Propriété : Une série géométrique $\sum_{n\geq 0} x^n$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$

Propriété : [Somme des séries géométriques]

Pour $x \in]-1;1[$ on a : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}}$

Vocabulaire : Toute série de la forme $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée *série géométrique dérivée*

Propriété : Une série géométrique dérivée $\sum_{n\geq 1} nx^{n-1}$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$

Propriété : [Somme des séries géométriques dérivées]

Pour $x \in]-1;1[$ on a : $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}}$

Vocabulaire : Toute série de la forme $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée *série géométrique dérivée seconde*

Propriété : Une série géométrique dérivée seconde $\sum_{n\geq 2} n(n-1)x^{n-2}$ converge si, et seulement si, $|x| < 1$

Propriété : [Somme des séries géométriques dérivées seconde]

Pour $x \in]-1;1[$ on a : $\boxed{\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{\partial^2}{(\partial x)^2}\frac{1}{1-x} = \frac{2}{(1-x)^3}}$

Séries exponentielles

Vocabulaire : Toute série de la forme $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ avec $x \in \mathbb{R}$ est appelée *série exponentielle*

Propriété : Toute série exponentielle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!}$ converge pour $x \in \mathbb{R}$.

Propriété : [Somme des séries exponentielles]

Pour $x \in \mathbb{R}$ on a : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$ **[admis] mais resterait démontrable**