.

Réduction des matrices carrées

Exercice 1 On considère les matrices A, B, C et D définies ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer l'inversibilité éventuelle de chacune de ces matrices.
   On pourra utiliser le déterminant
2. Déterminer les valeurs propres réelles de chacune de ces matrices.
3. Pour chaque valeur propre réelle λ de chacune de ces matrices, déterminer l'espace propre E_λ associé.

Exercice 2 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et expliciter les sous-espaces propres associés.

Exercice 3 On rappelle que la matrice Attila d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est la matrice $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des uns. Retrouver la relation liant H_n^k avec H_n (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et en déduire les valeurs propres de H_n. Quel est le rang de H_n ?

Exercice 4 *(D'après EML 2014 voie E)*

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \ ; \ (a;b;c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

1. Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
2. On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit f sur F par $f(N) = TNT$. Justifier que f est un automorphisme de F.
3. La famille $\mathcal{B} = (E_{1\,1} \ ; \ E_{1\,2} \ ; \ E_{2\,1} \ ; \ E_{2\,2})$ désigne la base canonique de E.
   Démontrer que la sous-famille $\mathcal{A} = (E_{1\,1} \ ; \ E_{1\,2} \ ; \ E_{2\,2})$ est une base de F.
4. Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{A}$.
5. Etablir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S_\lambda = \{M \in F \ ; \ f(M) = \lambda M\}$ est un sous-espace vectoriel de F.
6. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_λ est de dimension non nulle. Que reconnait-on ?

Exercice 5 Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire A^{-1}.

Exercice 6 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. Trouver les valeurs propres de A et déterminer les espaces propres correspondants.

Exercice 7 Dans le cas général d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, expliciter le polynôme caractéristique $P_A(X)$.

Exercice 8 On donne la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour chacun des espaces propres, construire une base. On mentionnera la dimension de chaque espace propre.
3. Vérifier que ces espaces sont en somme directe (*i.e.* d'intersection deux à deux réduites à $\{0_{\mathbb{R}^3}\}$.

Exercice $\boxed{\textbf{9}}$ On donne les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Indiquer pour chacune si elle est, ou non, diagonalisable.

Exercice $\boxed{\textbf{10}}$ *(D'après concours ENS-D2 Paris-Saclay 2016)*
On considère les applications u et v définies par :

$$\begin{array}{rcl} u : \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (z_1; z_2; z_3) & \mapsto & (2z_1 - z_3; 3z_1 + z_2 + 2z_3) \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcl} v : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (z_1; z_2) & \mapsto & (z_1 + z_2; -z_2; 2z_1 - z_2) \end{array}$$

1. Vérifier que u est une application linéaire et en donner la matrice H relativement aux bases canoniques.
2. Donner, de même, la matrice K de v relativement aux bases canoniques.
3. Déterminer le noyau de u. L'application u est-elle injective ? Procéder de même avec v.
4. Déterminer l'image de u. L'application u est-elle surjective ? Procéder de même avec v.
5. Calculer le produit HK et établir que $(HK)^2 = \lambda I_2$ où l'on déterminera le réel λ.
6. Démontrer sans calcul que HK est inversible. Quelles en sont les valeurs propres ?
7. Déterminer $(u \circ v)^2$

Exercice $\boxed{\mathcal{D}}$ Etudier la diagonalisabilité éventuelle des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 6 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

On pourra reprendre l'étude menée dans exercice $\boxed{1}$

Exercice $\boxed{\Delta}$ Pour chaque matrice diagonalisable de l'exercice $\boxed{\mathcal{D}}$, procéder à la diagonalisation de façon effective (les matrices de passages sont attendues).
En déduire l'expression des puissances $n$ièmes de chaque matrice diagonalisable.

Exercice $\boxed{\textbf{11}}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 3 \\ 3 & -6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de A.
2. Démontrer qu'il existe un polynôme annulateur de A de degré 2.
3. Justifier qu'il existe deux suites de réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; A^n = a_n A + b_n I_3$$

4. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice $\boxed{12}$ **une Suite Récurrente Linéaire**

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dite récurrente linéaire (d'ordre 3), par :

$$\begin{cases} u_0 = 1\ ;\ \ u_1 = -1\ ;\ \ u_2 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \end{cases}$$

On posera $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Décrire $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$
2. En déduire, par récurrence, que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que A n'est pas diagonalisable.
4. Décrire une base de chaque espace propre associé à A.

   On pourra vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A.
5. Déterminer une matrice P inversible vérifiant $A = PTP^{-1}$ où $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et expliciter la matrice inverse P^{-1}
6. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{13}$ **Suites récurrentes linéaires d'ordre 2**

On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, dite récurrente linéaire d'ordre, par :

$$\begin{cases} u_0 \in \mathbb{R}\ ;\ \ u_1 \in \mathbb{R} \\ \forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \end{cases}$$

où a et b sont deux réels vérifiant $a^2 + 4b > 0$

On posera $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Décrire $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$
2. En déduire, par récurrence, que $X_n = A^n X_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que A est diagonalisable.
4. En déduire qu'il existe une matrice inversible P telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \ A^n = PD^nP^{-1}$$

   où D est une matrice diagonale à expliciter.
5. *Applications :*
   (a) Décrire explicitement u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$ lorsque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = u_1 = 1$ et la relation $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$
   (b) La suite de Fibonacci est définie par $F_0 = F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le terme général F_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice $\boxed{14}$ Soit A une matrice et Q un polynôme annulateur de A. Démontrer que, si $\lambda \in Sp(A)$ alors λ est racine de Q.

Exercice $\boxed{15}$ Soit u un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ (avec $n \in \mathbb{N}^*$). On suppose que $P(X) = 1 - X^3$ et $Q(X) = X^2 - 2X + 1$ sont des polynômes annulateurs de u.

Déterminer $Sp(u)$ et en déduire l'endomorphisme u.

Exercice $\boxed{16}$ On se donne $x \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et on note H_x la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des x.
Démontrer que H_x est diagonalisable.

Exercice $\boxed{17}$ On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que l'on a :
$$\{0_{\mathbb{R}^4}\} \subset ker(A) \subset ker(A^2) \subset ker(A^3) = \mathbb{R}^4$$
On donnera, en particulier, les dimensions de chaque espace de cette chaine d'inclusions.
2. Démontrer que $ker(A^2)$ admet pour supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ une droite vectorielle.
On notera w un vecteur directeur de cette droite dans la suite.
3. Etablir la liberté de la famille $(w \ ; \ Aw \ ; \ A^2w)$ dans $\mathbb{R}^4$.
4. Justifier que $Aw \in ker(A^2)$ et que $ker(A^2) = ker(A) \oplus vect(Aw)$
5. Montrer que $A^2w \in ker(A)$ et déterminer v tel que $ker(A) = vect(A^2w) \oplus vect(v)$
6. En déduire que $\mathcal{B} = (w \ ; \ Aw \ ; \ A^2w \ ; \ v)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
7. On note P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}$. Déterminer $P^{-1}AP$

Exercice $\boxed{18}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Diagonaliser, dans une base orthonormée, chacune des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ;$$

Exercice $\boxed{19}$ On se donne l'application u définie par :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & (2X+1)P - (X^2-1)P' \end{array}$$

Démontrer que u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ puis déterminer si u est diagonalisable. Si tel est le cas, diagonaliser u.

Exercice $\boxed{20}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Démontrer que, si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ diagonalisable alors pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ on a $P(f)$ endomorphisme diagonalisable.

Exercice $\boxed{21}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ **Diagonalisabilité des projecteurs en dimension finie**
Soit p un projecteur de $E = \mathbb{R}^n$. On rappelle que $p^2 = p \circ p = p$.

1. Etablir que $id_E - p$ est aussi un projecteur de E.
2. Justifier que $ker(p) \oplus Im(p) = E$
3. Soit q un autre projecteur de E tel que $p + q$ soit encore un projecteur de E.
   (a) Montrer que $pq = qp = 0_E$
   (b) Etablir que $Im(p+q) = Im(p) + Im(q)$
   (c) Démontrer que $ker(p+q) = ker(p) \cap ker(q)$
4. Conclure enfin que tout projecteur p de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.