.

Intégrales Généralisées

Rappels d'intégration de base

Exercice $\boxed{1}$ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(x^2-5)dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{2}(1-x)dx$ **3.** $\displaystyle\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}}\,dt$ **4.** $\displaystyle\int_0^2 \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right)dt$ **5.** $\displaystyle\int_0^2 3e^{4x}dx$

6. $\displaystyle\int_0^2 \frac{3x}{(x^2+1)^2}dx$ **7.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{t^3}{t^4+2}dt$ **8.** $\displaystyle\int_1^3 e^{1-2t}\,dt$ **9.** $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{x+1}{x^2+2x}\right)dx$ **10.** $\displaystyle\int_1^2 u\sqrt{u}\,du$

Exercice $\boxed{2}$ Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1} e^{3x-2}dx$ **2.** $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{2}e^{-x^2}dx \quad (a\in\mathbb{R})$ **3.** $\displaystyle\int_0^2 u\sqrt{u^2+1}\,du$ **4.** $\displaystyle\int_e^{e^n}\frac{1}{t\ln t}dt \quad (n\in\mathbb{N}^*)$

Exercice $\boxed{3}$ Calculer, à l'aide d'intégrations par parties :

1. $\displaystyle\int_1^t \ln x\,dx \quad (t>0)$ **2.** $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-ax}dx \quad (a\in\mathbb{R})$ **3.** $\displaystyle\int_0^2 t\ln(t+1)\,dt$ **4.** $\displaystyle\int_0^x (2t+1)e^{-t}dt \quad (x\in\mathbb{R})$

Théorème fondamental de l'intégration

Exercice $\boxed{4}$ Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 1 de la fonction $f: t\mapsto t^2\ln t$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice $\boxed{5}$ Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 0 de la fonction $f: t\mapsto 2te^{-t/2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Changement de variables

Exercice $\boxed{6}$ Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables :

1. (a) En posant $u=e^x$, calculer :
$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$$
   (b) En posant $x=\tan(\theta)$, calculer :
$$\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$$
2. (a) En posant $x=\frac{1}{1+u}$, calculer :
$$\int_0^2 \frac{\mathrm{d}u}{(1+u^2)e^{\frac{1}{1+u}}}$$
   (b) **Brutal !** En posant $u=\sqrt{e^x-1}$, calculer :
$$\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x-1}}$$

On pourra retenir que la fonction $x\mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ *admet pour primitive* $x\mapsto$*arctan*(x) *sur* $\mathbb{R}$, *cette fonction étant la réciproque de* $\tan$ *définie sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

Intégration par récurrence

Exercice $\boxed{7}$ **une suite d'intégrales célèbres**

1. On pose, pour $x > 0$ fixé, $I_0(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-pt}\,dt$. Calculer $I_0(x)$
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, on définit $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n e^{-pt}\,dt$.
   (a) Exprimer $I_{n+1}(x)$ en fonction de $I_n(x)$ (et aussi de n et x) à l'aide d'une intégration par parties.
   (b) Justifier que $I_n(x)$ admet une limite réelle I_n lorsque n tend vers $+\infty$ (on ne demande pas encore cette limite).
   On pourra raisonner à l'aide d'une récurrence rédigée avec grande rigueur
3. Démontrer enfin que, pour tout $p > 0$ fixé, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lim_{x \to +\infty} \int_0^x t^n e^{-pt}\,dt = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

Exercice $\boxed{8}$ On définit une suite d'intégrales $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $I_n = \displaystyle\int_1^e (\ln x)^n\,dx$ avec convention $I_0 = \displaystyle\int_1^e\,dx$.

1. Calculez I_0 et I_1
2. Pour $x \in]1; e[$ et $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
3. En déduire les variations puis le signe de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
4. Etablir la relation de récurrence $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ \ (n+1)I_n \leq e$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.
6. Quelle est la valeur de $nI_n + I_n + I_{n+1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$? Calculez alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nI_n$

Intégrales généralisées

Exercice $\boxed{9}$ **Introduction au concept**

On écrit $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$. On dira alors que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale diverge.

1. Les intégrales suivantes convergent-elles ? Si oui, en donner la valeur.

$$\mathbf{1.}\ \int_0^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad \mathbf{2.}\ \int_0^{+\infty} te^{-2t}dt \qquad \mathbf{3.}\ \int_0^{+\infty} \frac{2}{x+2}dx \qquad \mathbf{4.}\ \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+\pi t^2}dt$$

2. Démontrer que si f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{+\infty} f(t)e^{-t}dt \ \text{ converge}$$

3. Etblir un résultat similaire si p est une fonction polynômiale réelle avec l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} p(t)e^{-t}dt$.
4. Déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$\mathbf{1.}\ \int_0^1 x\ln x dx \qquad \mathbf{2.}\ \int_0^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}dx \qquad \mathbf{3.}\ \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad \mathbf{4.}\ \int_0^{+\infty} \frac{x-3}{x^2+x+1}dx$$

Exercice $\boxed{\textbf{CV}}$ Pour chaque intégrale proposée, déterminer si elle converge ou non.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}dx$ (2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)}dx$ (3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^x dx$ (4) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx$

(5) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1}dx$ (6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}}dx$ (7) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(t)}dt$ (8) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{t^2-t}{\sqrt{1-t}}dt$

Exercice $\boxed{10}$ **Introduction d'une célèbre fonction**

La fonction Gamma (notée Γ) est définie au moyen de l'intégrale impropre :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ converge. Qu'en est-il pour $x \leq 0$?
2. Calculer $\Gamma(1)$.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}\ \Gamma(n+1) = n!$.
   NB : *L'étude ou la connaissance de cette fonction peuvent être des attendus de concours ensD2 -Voir sujet 2014*

Applications aux densités

Exercice $\boxed{11}$ *Densités simples*

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par :

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x^n\sqrt{x}}\mathbb{1}_{[1;+\infty[}(x)$$

où a_n désigne un réel ne dépendant pas de x.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}$ pour lequel f est une densité de probabilités.
   Déterminer alors la constante a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire si $n = 0$?
2. Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Pour $n = 2$, démontrer que cette variable aléatoire admet une espérance mais pas de variance.
   (b) De façon générale, pour $n >$ entier naturel donné, pour quelles valeurs de r la variable aléatoire X_n admet-elle des moments d'ordre r ?
   (c) Démontrer l'existence puis déterminer la variance de X_n dans le cas où $n \geq 3$.
3. Déterminer explicitement la fonction de répartition F_n correspondant à la loi étudiée, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ puis en tracer la courbe dans le cas où $n = 2$.

Exercice $\boxed{12}$ **Intégrale de Gauss** On définit une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\,dt$$

1. Calculer $f(0)$.
2. On admet pour cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a :

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x}f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\,dt$$

   Calculer ainsi $f'(x)$ pour $x \geq 0$ et indiquer la valeur de $f'(0)$.

3. On pose $g(x) = f(x^2)$.
   (a) Calculer $g(0)$.
   (b) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $g'(x) = -2e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$
4. On définit enfin $h(x) = g(x) + \left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt \right)^2$
   (a) Vérifier que $h(0) = \frac{\pi}{4}$.
   (b) Démontrer que h est en fait constante sur $\mathbb{R}_+$. (*Indication : on pourra prouver que h' nulle*)
5. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
6. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\, dt$
7. Retrouver alors que la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

   est bien une densité de probabilité.

Exercice $\boxed{13}$ *Première Loi de Laplace*

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

1. Démontrer que f est une densité de probabilités.
   On dira qu'une variable aléatoire X suit la (première) loi de Laplace lorsqu'elle admet f pour densité.
2. Soit X suivant la loi de Laplace. Etablir que X admet une espérance et calculer cette espérance.
3. Etablir que si X suit la loi de Laplace, alors X admet des moments $m_r = \mathbb{E}[X^r]$ nuls à tout ordre r impair.
4. Justifier que X suivant la loi de Laplace admet pour moments n pairs :

$$\mathbb{E}[X^n] = n!$$

Exercice $\boxed{14}$ *A partir de la fonction de répartion*

On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5} \mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)$$

On admet que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X.

1. La variable X est-elle à densité ? Si oui, en donner une densité associée.
2. La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? (on ne demande pas sa valeur le cas échéant)
3. On donne $G(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right) \mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)$. La fonction G est-elle la fonction de répartition d'une VAR à densité ? Justifier.