Vecteurs aléatoires

Exercice $\boxed{7}$

1. On va expliciter la loi de Z en distinguant 6 cas sur la valeur $k \in \mathbb{N}$. Dans chaque étude, on utilise la formule des probabilités totales selon le système complet d'événements $(\mathbb{P}[Y=1]\ ;\ \mathbb{P}[Y=2]\ ;\ \mathbb{P}[Y=3])$ et on effacera tout cas menant à une probabilité nulle.
   On rappelle de plus que, d'après les hypothèses, on a $\mathbb{P}\left([Y=i] \cap [X=n]\right) = \mathbb{P}[Y=i]\mathbb{P}[X=n]$ pour tout $(i;n) \in [\![1;3]\!] \times \mathbb{N}$ et que :
   $$\mathbb{P}[Y=i] = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad \mathbb{P}[X=n] = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}$$
   - *Cas $k=6p$:* On a $\mathbb{P}[Z=k] = \mathbb{P}[XY=6p] = \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X=6p]\right) + \mathbb{P}\left([Y=2]\cap[X=3p]\right) + \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X=2p]\right)$
     Ce qui nous conduit à écrire :
     $$\mathbb{P}[Z=6p] = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda^{6p}}{(6p)!} + \frac{\lambda^{3p}}{(3p)!} + \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}\right)e^{-\lambda}$$
   - *Cas $k=6p+1$:* On a $\mathbb{P}[Z=k] = \mathbb{P}[XY=6p+1] = \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X=6p+1]\right)$
     Ce qui nous conduit à écrire :
     $$\mathbb{P}[Z=6p+1] = \frac{1}{3}\frac{\lambda^{6p+1}}{(6p+1)!}e^{-\lambda}$$
   - *Cas $k=6p+2$:* On a $\mathbb{P}[Z=k] = \mathbb{P}[XY=6p+2] = \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X=6p+2]\right) + \mathbb{P}\left([Y=2]\cap[X=3p+1]\right)$
     Ce qui nous conduit à écrire :
     $$\mathbb{P}[Z=6p+2] = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda^{6p+2}}{(6p+2)!} + \frac{\lambda^{3p+1}}{(3p+1)!}\right)e^{-\lambda}$$
   - *Cas $k=6p+3$:* On a $\mathbb{P}[Z=k] = \mathbb{P}[XY=6p+3] = \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X=6p+3]\right) + \mathbb{P}\left([Y=3]\cap[X=2p+1]\right)$
     Ce qui nous conduit à écrire :
     $$\mathbb{P}[Z=6p+3] = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda^{6p+3}}{(6p+3)!} + \frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!}\right)e^{-\lambda}$$
   - *Cas $k=6p+4$:* On a $\mathbb{P}[Z=k] = \mathbb{P}[XY=6p+4] = \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X=6p+4]\right) + \mathbb{P}\left([Y=2]\cap[X=3p+2]\right)$
     Ce qui nous conduit à écrire :
     $$\mathbb{P}[Z=6p+4] = \frac{1}{3}\left(\frac{\lambda^{6p+4}}{(6p+4)!} + \frac{\lambda^{3p+2}}{(3p+2)!}\right)e^{-\lambda}$$
   - *Cas $k=6p+5$:* On a $\mathbb{P}[Z=k] = \mathbb{P}[XY=6p+5] = \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X=6p+5]\right)$
     Ce qui nous conduit à écrire :
     $$\mathbb{P}[Z=6p+5] = \frac{1}{3}\frac{\lambda^{6p+5}}{(6p+5)!}e^{-\lambda}$$

   Comme X et Y sont indépendantes, on peut calculer $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 2\lambda$ comme X et Y suivent des lois de référence (dont les espérances sont connues).
   De même : $\mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}[XY] = \mathbb{E}[X^2Y^2] - \mathbb{E}[XY]^2 = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[Y]^2$ d'après la formule de Koening-Huygens et comme X^2 et Y^2 sont indépendantes entre elles. Finalement :
   $$\mathbb{V}[Z] = (\lambda^2+\lambda)\left(4+\frac{2}{3}\right) - 4\lambda^2 = \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{14}{3}\lambda$$
   NB : si l'on ne connait pas directement les moments quadratiques de lois de référence (c'est admissible), on peut toujours les retrouver en calculant $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{E}[X]^2$ qui utilie des valeurs supposées connues.
2. Il suffit de regrouper les cas qui nous intéressent en utilisant la formule des probabilités totales dans le même cadre qu'en 1° :
   $$\mathbb{P}[Z \in 2\mathbb{N}] = \mathbb{P}[Y=2] + \mathbb{P}\left([Y=1]\cap[X\in 2\mathbb{N}]\right) + \mathbb{P}\left([Y=3]\cap[X\in 2\mathbb{N}]\right) = \frac{1}{3}\left(1 + 2\sum_{p\in\mathbb{N}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^{2p}}{(2p)!}\right) = \frac{2+e^{-2\lambda}}{3}$$

Exercice 15

On propose de démontrer les résultats directement, dans tous les cas.

Considérons $A \in \mathcal{A}$: l'application $\mathbb{1}_A$ définie sur Ω renvoie 1 sur $A \in \mathcal{A}$ et 0 sur $\overline{A} \in \mathcal{A}$ puisque les tribus sont stables par passage au complémentaire.

Ainsi, $\mathbb{1}_A^{-1}(I) \in \{\emptyset; \Omega; A; \overline{A}\} \subset \mathcal{A}$ pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ faisant de $\mathbb{1}_A$ une variable aléatoire de l'espace considéré. De plus, elle est finie, donc elle admet une espérance et une variance. On a alors :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = 0 \times \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) + 1 \times \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}(A) \quad ; \quad \mathbb{V}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$

Remarque : En fait, $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$

Considérons à présent $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$ donnés et posons $A_r = [|X|^r \geq \lambda^r]$. Pa positivité, il est clair que A_r est réalisé si, et seulement si, $A_1 = [|X| \geq \lambda]$ est réalisé. Ainsi :

$$\lambda^r \mathbb{1}_{A_1} = \lambda^r \mathbb{1}_{A_r} \leq |X|^r$$

Doù l'on a $\mathbb{E}[\lambda^r \mathbb{1}_{A_1}] \leq \mathbb{E}[|X|^r]$ ce qui se réécrit alors (linéarité de $\mathbb{E}$ avec λ^r constante) :

$$\lambda^r \mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{E}[|X|^r] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}[|X| \geq \lambda^r] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{\lambda^r}$$

En posant $r = 1$ on trouve l'inégalité de Markov. On va ensuite employer ce dernier cas et l'écrire en travaillant avec la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}[X])^2$ et en choisissant $\lambda = \varepsilon^2$ où $\varepsilon > 0$ est fixé :

$$\mathbb{P}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \lambda\right] = \mathbb{P}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \varepsilon^2\right]$$

mais comme $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \varepsilon^2 \;\Leftrightarrow\; |X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon$ est vérifié, on trouve :

$$\mathbb{P}\left[X - \mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\right] \;\leq\; \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]}{\varepsilon^2} \;=\; \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

sous couvert d'existence de l'espérance et de la variance de X.

Ces résultats s'appliquent sans peine aux cas demandés. En particulier, si $X \geq 0$, on a $|X| = X$ et si l'on écrit $\lambda = x$ on trouve que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathbb{E}[|X|]}{x} = 0$ d'où l'on aura

$$0 \leq \mathbb{P}[X > x] \leq \mathbb{P}[|X| > x] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|]}{x} \implies \lim_{x \to +\infty} \mathbb{P}[X > x] = 0$$

par le théorème des gendarmes.