.

Analyse dans $\mathbb{R}^n$

Topologie de Base

Exercice $\boxed{1}$ On donne $I = \left\{x \in \mathbb{R} \mid -2 < x + \dfrac{1}{2x} \leq 2\right\}$.

1. L'ensemble I est-il un intervalle ?
2. Dire si I est ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre.
3. Même questions avec $D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 2x - y < 3\right\}$

Exercice $\boxed{2}$ Les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{llll} a) & A = [0;3[\quad b)\ B = \{0\} \cup]1;2] & c) & C = \left]-1; \frac{1}{6}\right[\cap \left[0; \frac{1}{3}\right] \\ d) & D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\} & e) & U = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-5| \leq 3\} \end{array}$$

Exercice $\boxed{3}$ Les ensembles suivants sont-ils ouverts, fermés, bornés dans $\mathbb{R}^2$?

$$\begin{array}{llll} a) & A =]1;2] \times [-1;0] \quad b)\ B = [-1;2] \times \mathbb{R}_+ & c) & C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + 7y < 1 \ \wedge \ 2y - 1 > x\} \\ d) & D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + 4y^2 + 6y \leq 36\} & e) & U = vect(e_1 + e_2) \cap [0;1]^2 \end{array}$$

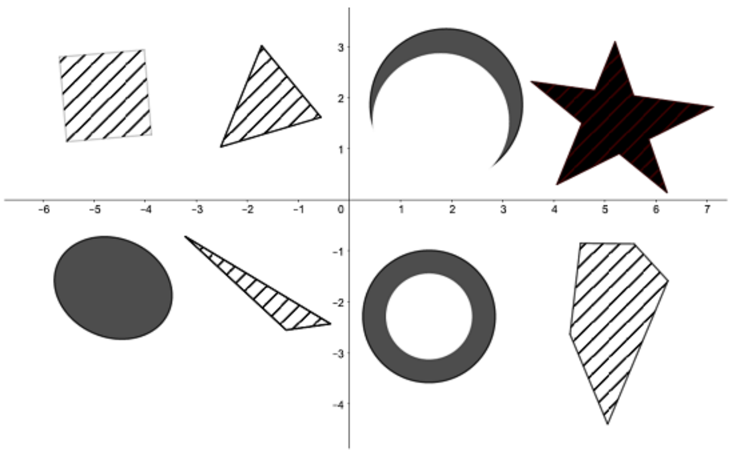
Exercice $\boxed{4}$ Représenter graphiquement puis indiquer si les ensembles suivants sont ouverts :

$$\begin{array}{llll} a) & A = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - 2x + y^2 + 4y < 5\right\} & b) & B = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x-1| < 1\right\} \\ c) & C = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \ \wedge \ |y| \leq 1\right\} & d) & D = \left\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq e^x\right\} \end{array}$$

Exercice $\boxed{5}$ **Convexité géométrique**

On se place dans le plan usuel assimilé à $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé (direct).

1. Sans justifier, et visuellement, indiquez pour chaque figure si elle convexe ou non :



2. Pour une fonction f donnée, on note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative vue comme l'ensemble :

$$\mathcal{C}_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f \;\wedge\; y = f(x)\}$$

où $\mathcal{D}_f$ désigne le domaine de définition de f.
La région du plan située *au-dessus* de $\mathcal{C}_f$ sera notée $\mathcal{S}_f$ et définie par :

$$\mathcal{S}_f = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f \;\wedge\; y \geq f(x)\}$$

Indiquer, chacune des fonctions suivantes, à partir de considérations géométriques, si S_f est convexe :

$$a)\quad f(x) = x^2 \quad b)\quad f(x) = x^3 \quad c)\quad f(x) = e^x \quad d)\quad f(x) = 2x - 5 \quad e)\quad f(x) = \sqrt{|x|}$$

Exercice $\boxed{6}$ On considère la fonction $\varphi : (x; t) \mapsto (x + 2t)e^{t-x}$ définie sur $\mathbb{R}^2$.
On notera, pour $t \in \mathbb{R}$ fixé, $f_t : x \mapsto \varphi(x; t)$ et, pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, $g_x : t \mapsto \varphi(x; t)$

1. Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction f_t est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f_t'(x) = \dfrac{\partial \varphi(x; t)}{\partial x}$
2. Etudier, en fonction de $t \in \mathbb{R}$, la convexité de f_t sur $\mathbb{R}$.
3. Procéder à une étude similaire de g_x en fonction de $x \in \mathbb{R}$.
4. Vérifier que $\dfrac{\partial f_t'(x)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 \varphi(x; t)}{\partial x \partial t}$ et $\dfrac{\partial g_x'(t)}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 \varphi(x; t)}{\partial t \partial x}$ coïncident.

Exercice $\boxed{7}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ **Comparaison pour la factorielle**
Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on se donne une famille $(x_1; \dots x_n)$ de n réels positifs strictement.

1. En utilisant la fonction ln, démontrer que : $(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \dfrac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$
2. Etablir que : $\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \geq \dfrac{1}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$
3. Conclure enfin que $n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$

Exercice $\boxed{8}$ **Topologie dans** $\mathbb{R}^n$ On donne $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$.
Pour chacun des ensembles suivants, indiquer la nature topologique (ouvert, fermé, compact, convexe) :

$$a)\quad A = \left\{(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} x_k \geq 1\right\} \qquad b)\quad B = \left\{(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} k{x^2}_k = n\right\}$$

$$c)\quad C = \left\{(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} (x_k - k)^2 < 1\right\} \qquad d)\quad D = \left\{(x_1; \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k x_k = 0\right\}$$

Dérivées partielles

Exercice $\boxed{9}$ On considère les expressions des fonctions à deux variables réelles ci-dessous :

$$a)\quad f(x; y) = \frac{x^2 y}{x + y} \quad b)\quad g(x; y) = \frac{x - y}{x^2 + y^2} \quad c)\quad h(x; y) = \frac{x^4 y}{x^2 - y^2} \quad d)\quad \varphi(x; y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

1. Pour chacune des fonctions fournies, décrire le domaine de définition $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ et indiquez s'il s'agit d'un ouvert, d'un fermé.
2. Calculez les dérivées partielles d'ordre 1 de chacune de ces fonctions puis exprimer leur gradient.

Exercice $\boxed{10}$ Pour chacune des fonctions f proposées, on pose $f(0;0)=0$ et on fournit une expression pour $(x;y)\neq(0;0)$:

$$a)\quad f(x;y)=\frac{x-2y}{x^2-y}\qquad b)\quad f(x;y)=\frac{x^2+y}{x+y}\qquad c)\quad f(x;y)=\frac{(\sin x)(\sin y)}{2xy}$$

1. Dans chaque cas, exprimer le gradient $\nabla f(x;y)$ pour $(x;y)\neq(0;0)$
2. Décrire la matrice Hessienne de chacune de ces fonctions.

Exercice $\boxed{11}$ **Calculs de dérivées partielles**

Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions suivantes (on ne demande pas l'étude des domaines) :

1. p définie sur $\mathbb{R}^2$ par $p(x;y)=3x^{\frac{1}{3}}y^2-5x^2y^{\frac{2}{3}}+6\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^3+y^2$
2. f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x;y)=\dfrac{3x\sqrt{y}}{x^2+y^2+2}$
3. g définie sur $\mathbb{R}^3$ par $g(x;y;z)=\ln(x)ze^{2-yx+z}-3y\sqrt{z^{\frac{1}{3}}}$

Exercice $\boxed{12}$ Déterminer, dans chaque cas, le développement limité au second ordre des fonctions suivantes au voisinage de $O\in\mathbb{R}^n$:

1. $xy+e^y$ au voisinage de $O=(0;0)\in\mathbb{R}^2$
2. $\dfrac{x}{1+y}+\dfrac{y}{1+z}+\dfrac{z}{1+x}$ au voisinage de $O=(0;0;0)\in\mathbb{R}^3$
3. **trigo** $(\sin y)e^{x^2-1}$ au voisinage de $O=(0;0)\in\mathbb{R}^2$

Exercice $\boxed{13}$ On donne la fonction f définie par :

$$f(x;y)=x\ln(1+y)\ +ye^x$$

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de f. Quelle est sa nature topologique (ouvert, fermé, borné) ?
2. Déterminer le gradient de f puis sa matrice Hessienne de f en $(x;y)\in\mathcal{D}_f$.

Optimisation sans contrainte

Exercice $\boxed{14}$ On considère l'application de $]-1;1[^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par $t(x+y)=\dfrac{x+y}{1+xy}$

1. Déterminer les dérivées partielles $\dfrac{\partial t}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial t}{\partial y}$
2. Démontrer que $t\left(]-1;1[^2\right)=]-1;1[$
3. La fonction t admet-elle des points critiques ? Justifier.
4. Sur $]-1;1[^2$, la fonction admet-elle un majorant ? un minorant ?
5. Sur $]-1;1[^2$, la fonction admet-elle un maximum ? un minimum ?

Exercice $\boxed{15}$ Soit f la fonction définie par $f(x;y)=2x^4-5xy+4y^2$

1. Déterminer les points critiques de f puis exprimer la matrice Hessienne de f.
2. Déterminer si f est convexe (ou concave) sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice $\boxed{16}$ On définit la densité normale de dimension 2 par :

$$\forall(x;y)\in\mathbb{R}^2\quad f(x;y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x^2+y^2)/2}$$

1. Vérifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$
2. Rechercher les points critiques éventuels de f.
3. Déterminer la matrice Hessienne générale de f.
4. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}^2$? Un minimum sur $\mathbb{R}^2$?
5. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}^2$? Concave ?

Exercice $\boxed{17}$ On définit sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$ une fonction f par :

$$f(x;y) = (1+x)(1+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)$$

1. Vérifier que f admet des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$
2. Déterminer la matrice Hessienne de f.
3. La fonction f est-elle convexe sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$? Concave ?

Exercice $\boxed{18}$ **Ens D2 sujet 2024**

On considère les fonctions $g, h : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ par :

$$\begin{array}{rcl} g(t) & = & (t+1)\ln(t) - 2(t-1) \\ h(t) & = & 2(t^2-1)\ln(t) - 4(1-t)^2 \end{array}$$

1. Vérifier que g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et étudier les variations de g.
2. (a) Trouver un polynôme P tel que $h = gP$
   (b) En déduire les variations de h, et montrer que, pour tout $t > 0$, $h(t) > 0$
   On s'intéresse maintenant à la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x;y) = (x-y)(\ln(x)-\ln(y)) - 4\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$$

3. (a) Montrer que l'on peut écrire $f(x;y) = xh(v(x;y))$ pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ avec v une certaine fonction définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
   (b) Justifier que $f(x;y) \geq 0$ pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$
4. (a) Quelle condition doit satisfaire $(x^*;y^*)$ pour que f admette un extremum en $(x^*;y^*)$?
   (b) Avec le changement de variable $t = \dfrac{y}{x}$, conclure sur les possibles extrema de f.
   On pourra utiliser l'égalité $t + \dfrac{1}{t} = \left(\sqrt{t}+\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)^2 - 2$
   (c) Montrer que f admet un minimum global.