.

Théorèmes fondamentaux de l'analyse

Ce document prolonge et complète les notions vues lors des études de fonction

☐ **Théorème des valeurs intermédiaires (TVI)** : L'image, par une application continue, d'un intervalle I est un intervalle.

☐ **Corollaire du TVI** : Toute application f continue et strictement monotone d'un intervalle I réalise une bijection de I sur $f(I)$ qui est alors aussi un intervalle.
Remarque : Aussi appelé *théorème de bijection*.

Application Majeure : Dénombrement des solutions d'équations du type $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ et f continue à variations strictes par intervalles.

☐ **Théorème de Rolle** : Soit $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ application continue sur $[a;b]$.
Si f est dérivable sur $]a;b[$ et $f(a) = f(b)$ alors :

$$\exists c \in]a;b[\quad f'(c) = 0$$

Le programme officiel stipule clairement *sans démonstration* pour ce théorème.
Conséquence Majeure : Théorème des accroissements finis.

▽ **Théorème des accroissements finis** : Soient $a < b$ deux réels et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$ application continue sur $[a;b]$.
Si f est dérivable sur $]a;b[$ alors :

$$\exists c \in]a;b[\quad f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

Conséquences Majeures : Caractérisation des fonctions constantes par dérivation nulle.

▽ **Inégalités des accroissements finis** : Soit f dérivable sur un intervalle I, à valeurs dans $\mathbb{R}$, avec $m \leq f' \leq M$ (bornée par m et M réels). Alors :

$$\forall (a;b) \in I^2 \;\; a \leq b \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

☐ **Caractérisation des fonctions constantes par la dérivée :** Soit f dérivable sur un intervalle I. Alors :

$$f \text{ constante sur } I \quad \Longleftrightarrow \quad f' \equiv 0$$

Application Principale : Deux fonctions ayant mêmes dérivées diffèrent d'une constante. Voir calcul intégral.

▽ **Formule de Taylor -avec reste intégral** : Soit f une application de $\mathcal{C}^{n+1}(I)$ contenant les réels a et b. Alors :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \; + \; \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Vocabulaire : $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$ s'appelle le *reste intégral*. Pour une démonstration, *voir l'exercice proposé*.
Application Principale : Construction des développements limités et des équivalents par majoration du reste intégral.

Conséquence Importante : Dans le cas où $f = \exp$ et avec $b = x$, $a = 0$, on trouve : $e^x = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$

☐ **Formule de Taylor-Young :** Pour $f \in \mathcal{C}^n(I)$ (où $n \in \mathbb{N}$) et $a \in I$ n'étant pas une borne de I, on a l'existence d'une fonction ε de limite nulle en 0 vérifiant :

$$\forall x \in I \;\; f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \;\; + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

Application Principale : Formulaire des développements limités.

Vers les démonstrations de résultats attendus

Formule de Taylor avec reste intégral

Le but de l'exercice est d'établir la formule de Taylor dite *avec reste intégral* :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \ + \ \int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx$$

où f est une application de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ sur un intervalle I contenant les réels a et b.

1. Vérifier que la formule est vérifiée pour f dérivable sur I, dans le cas $n = 0$, quels que soient a et b de I.
2. Etablir que, pour $f \in \mathcal{C}^{n+2}(I)$ on a, pour tout $(a;b) \in I^2$:

$$\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\, dx = \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(x)\, dx$$

3. En déduire une démonstration de la formule de Taylor avec reste intégral.

Inégalité de Taylor-Lagrange

On se place dans le même contexte que l'exercice précédent, dont le résultat est supposé à présent connu.

1. Démontrer que $|f^{(n)}|$ est majorée sur $[a;b]$, pour f de classe $\mathcal{C}^n$ sur I avec $a < b$ dans I.
2. Simplifier, pour $(a;b) \in I^2$ et $n \in \mathbb{N}$ la valeur de $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-x)^n}{n!}\, dx$
3. En déduire l'inégalité de Taylor-Lagrange :

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(b-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) \right| \leq \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a;b]} |f^{(n+1)}(x)|$$

4. *Application :* Démontrer que pour tout $(n;x) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ on a :

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{(n+1)!}$$

5. En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

On remarquera que, par suite, on peut démontrer la ***Formule de Taylor-Young*** :

$$\forall x \in I \ \ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \ \ + (x-a)^n \varepsilon(x-a)$$

pour $f \in \mathcal{C}^n(I)$ (où $n \in \mathbb{N}$) et $a \in I$ n'étant pas une borne de I, on a : pour une certaine fonction ε de limite nulle en 0.