.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice I : Matrice aléatoire servie avec sa sauce asymptotique

Pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$.

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.
   (a) La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Calculer pour tout entier $n \geq 2$, la matrice M^n
2. Dans cette question, on choisit $a = b$.
   (a) La matrice M est-elle inversible ?
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, on a $M^n = (1 + a)^{n-1} M$.
3. On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
   Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$
4. Dans cette question, on suppose que a et b sont choisis dans l'intervalle d'entiers $[\![-n\ ;\ n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$ est fixé.
   (a) Combien de telles matrices peut-on alors former au total ?
   (b) Parmi ces matrices, combien sont inversibles ? Symétriques ?
   Les résultats sont donnés en fonction de l'entier n.
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes deux la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$ et on définit la matrice aléatoire N par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$.
   Enfin, on pose A l'événement : "*la matrice N est inversible*".
   (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, écrire les développements de $(x + 1)^n$ et $(x + 1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.
   (b) Montrer que l'on a : $\displaystyle\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$.
   Indication : On pourra remarquer que $(x + 1)^{2n} = (x + 1)^n (x + 1)^n$
   (c) En déduire la relation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}\left([(X; Y) = (k; k)]\right) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$.
   (d) Déterminer $\mathbb{P}\left([X = Y]\right)$ et en déduire $\mathbb{P}\left(A\right)$ en fonction de n.
   (e) On donne la formule de Stirling $n! \sim n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$ (équivalent à l'infini).
   Donner un équivalent (à l'infini) de $\mathbb{P}\left([X = Y]\right)$, le plus simple possible et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A)$.
   Interpréter ce résultat dans le contexte proposé.

[D'après ESCP 2015 série T]

Exercice II : Le couple qui fait sa loi

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel non nul. Dans tout l'exercice, on se place sur un espace de probabilités $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ sur lequel toutes les variables aléatoires introduites seront définies.

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et de même loi notée $\mathcal{L}_n$ et vérfiant :
- $X(\Omega) = Y(\Omega) = [\![0\ ;\ n]\!]$
- $\forall (k;l) \in [\![0\ ;\ n-1]\!]^2 \qquad \mathbb{P}[X=k] = \mathbb{P}[X=l]$
- $\mathbb{P}[X=n] = \mathbb{P}[Y=n] = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}[X=k]$

Partie A : étude (non logarithmique) de la loi $\mathcal{L}_n$

On notera p la valeur de $\mathbb{P}[X=0]$ dans cette partie et on admettra que la loi $\mathcal{L}_n$ est bien définie en tant que loi de probabilité de variables aléatoires.

1. Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}[X=n]$ et $\mathbb{P}[Y=n]$ en fonction de p.
2. Justifier que X admet une espérance $\mathbb{E}[X]$ que l'on calculera en fonction de $n \neq 0$ et de p.
3. Justifier que X admet une variance $\mathbb{V}[X]$ que l'on calculera en fonction de $n \neq 0$ et de p.
4. Décrire la valeur $\mathbb{P}[Y=k]$ dans le cas $0 \leq k < n$ en fonction de n (et seulement de n).
5. Donner les valeurs respectives de $\mathbb{E}[Y]$ et $\mathbb{V}[Y]$ en fonction de l'entier n (et seulement de n).
6. Que vaut $cov(X;Y)$? Justifier.

Partie B : Examen approfondi d'un couple très particulier

Dans cette partie, **on fixe** $\boxed{n=2}$.
On définit à présent deux nouvelles variables aléatoires S et T par :

$$S = X+Y \qquad \text{et} \qquad T = XY$$

1. Déterminer les ensembles $S(\Omega)$ ainsi que $T(\Omega)$.
2. On note k un entier naturel.
   (a) Décrire la loi conditionnelle de S, sachant $[Y=k]$ réalisé dans le cas $k < n$.
   (b) Décrire la loi conditionnelle de S, sachant $[Y=k]$ réalisé dans le cas $k = n$.
3. Proposer une description de la loi conditionnelle de T sachant $[X=k]$ réalisé.
   On distinguera plusieurs cas selon les valeurs de l'entier k
4. Calculer les valeurs $\mathbb{E}[S]$ ainsi que $\mathbb{E}[T]$.
5. On cherche maintenant à étudier la loi conjointe du couple $(S;T)$
   (a) Combien de valeurs dénombre-t-on dans l'ensemble $(X;Y)(\Omega)$? (*On pourra les lister*)
   (b) Déterminer rigoureusement les valeurs $\mathbb{P}[(S;T)=(0;0)]$ et de $\mathbb{P}[(S;T)=(4;4)]$
   (c) Donner $\mathbb{P}[(S;T)=(1;2)]$ en justifiant.
   (d) Dresser le tableau de loi conjointe du couple $(S;T)$.
   On ne demande pas de justification
   (e) Décrire la loi marginale de S.
   (f) Décrire la loi marginale de T.
6. Les variables S et T sont-elles indépendantes ? Justifier.
7. En détaillant votre démarche, calculer $cov(S;T)$.
8. En déduire la valeur du coefficient de corrélation linéaire $\rho(S;T)$.

Partie C : Et plus généralement, la somme

Dans cette partie, on considère de nouveau que n est un entier naturel non nul quelconque.
Cette partie ne rentre pas en compte dans l'évaluation des notes destinées à l'université
On conserve la notation $S = X + Y$

1. Déterminer $\mathbb{E}[S]$ ainsi que $\mathbb{V}[S]$ en fonction de l'entier n
2. Décrire complètement la loi de S en fournissant la valeur de $\mathbb{P}[S = k]$ en fonction de l'entier k.

   *indication :*On pourra observer que $[S = k] = \displaystyle\bigcup_{i=0}^{k} ([X = i] \cap [Y = k - i])$ et distinguer trois cas selon les valeurs de k.

Exercice III : Une fonction à l'origine des problèmes

On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par $h(0) = 0$ et :

$$\forall t \neq 0 \quad h(t) = \frac{te^{-1/t}}{1 + e^{-1/t}}$$

1. La fonction h est-elle continue en 0 ? Justifier.
2. Démontrer que h admet une dérivée à droite en 0 et une dérivée à gauche en 0 et les déterminer.
3. On admettra dans la suite que h est dérivable en chaque point de $\mathbb{R}^*$. Calculer la valeur de $h'(t)$ pour $t \neq 0$
4. On pose $\varphi(x) = 1 + e^x + xe^x$ sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et en déduire le signe de $h'(t)$ pour $t \in \mathbb{R}^*$.
5. Calculer les valeurs de $\lim\limits_{t\to-\infty} h(t)$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} h(t)$ puis dresser le tableau des variations de h.

   Les deux prochaines questions ne rentrent pas en compte dans l'évaluation des notes destinées à l'université
6. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{2h(t)}{t}$ et en déduire un équivalent au voisinage de $+\infty$ de $h(t)$.
7. Tracer l'allure de h sur $\mathbb{R}$ dans un repère orthogonal aux axes bien choisis.

   Tout tracé d'éléments complémentaires permtinents tels que tangentes, asymptotes ou autre relevant de l'étude théorique effectuée ou de votre propre initiative sera apprécié.

Exercice IV : Un plan vectoriel de matrices

Pour tout couple de réels (x, y), on définit la matrice $M(x, y)$ par :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On note E l'ensemble de ces matrices $M(x, y)$ où x et y sont réels et on pose $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

1. Montrer que $E = \{M(x; y)\ ;\ (x; y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et sa dimension.
2. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

   Les questions suivantes ne rentrent pas en compte dans l'évaluation des notes destinées à l'université
3. Pour $k \in \mathbb{R}$ fixé, on note E_k l'ensemble des solutions de $AX = kX$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Démontrer que, en toute généralité, E_k est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$
   (b) Etablir que E_1, E_2 et E_3 sont de dimension 1, et fournir une base de chacun de ces trois espaces.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$. Démontrer que P est inversible puis exprimer explicitement son inverse P^{-1}.
5. Vérifier que : $A = PD_AP^{-1}$ où $D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.