Séries et VAR : corrigés

Exercice $\boxed{6}$ 1. On se propose d'écrire :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}[X_n = k] = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{n^k}\binom{n+1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k}$$

puis de calculer séparemment chacune des deux sommations. Ainsi :

- On calcule d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k - 1 - \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{n}(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)
\end{aligned}$$

  ayant utilisé, par reconnaissance d'une dérivée combinée avec un binôme de Newton :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k\binom{n+1}{k}x^{k-1} = \frac{\partial}{\partial x}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^k = (1+n)(1+x)^n$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n^k}\binom{n+1}{k} - (n+1)\times\frac{1}{n} - 1 \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right) - 1
\end{aligned}$$

  En assemblant, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}[X_n = k] = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} + \left(1+\frac{1}{n}\right) + 1 = 1$$

2. Pour n au voisinage de l'infini, on a $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$, donc :

$$\mathbb{P}[X_n = k] \equiv \frac{k-1}{n^k} \times \frac{n^k}{k!} = \frac{k-1}{k!}$$

   le dernier terme ne dépend pas de n donc il s'agit bien de la limite quand n tend vers $+\infty$

3. On décompose le calcul en deux sommes (la convergence ne pose aucun problème par comparaison à une série exponentielle visible) :

   D'une part :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1 - 1 = e - 2$$

   d'autre part :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$$

   Et ainsi, la somme de la série étudiée est $(e-1)-(e-2)=1$. La positivité des valeurs de $\frac{k-1}{k!}$ permet alors bien de définir la VAR notée Z dans l'énoncé.

4. On écrit :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k\mathbb{P}[Z=k] = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-2}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = e$$

5. Nous venons en fait d'établir que $\mathbb{E}[Z] = e$.
De plus, on peut vérifier que $\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}[X_n > k] = 1 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}[X_n > k]$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[X_n] = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k}\binom{n}{k} = 1 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1 = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$

(limite de référence)
Les valeurs coïncident.

Le lecteur pourra développer la rédaction (notamment sur l'usage de la formumle des probabilités totales assurant bien les convergences des séries exploitées)

Exercice $\boxed{9}$ 1. On calcule $\mathbb{P}[X=k]$ au moyen de la formule des probabilités totales en décomposant sur $([N=n])_{n\in\mathbb{N}}$, système complet d'événements. On va obtenir (la convergence étant acquise) :

$$\mathbb{P}[X=k] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-5}\frac{5^n}{n!}\binom{n}{k}\frac{4^{n-k}}{5^n} = \frac{e^{-5}}{k!}\sum_{n=k}^{n}\frac{4^n}{n!}$$

ayant $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ et avec un glissement d'indices $n := n+k$. On reconnait la série exponentielle pour écrire :

$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{e^{-5}}{k!}e^4 = e^{-1}\frac{1}{k!}$$

caractérisant ainsi la loi $\mathcal{P}(1)$.

2. On réécrit, pour $k \in \mathbb{N}$ donné : $\mathbb{P}[Y=k] = \mathbb{P}[X=N-k]$ et on développe par la formule des probabilités totales (mêmes argumentations) :

$$\mathbb{P}[Y=k] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[N=n] \times \mathbb{P}_{[N=n]}[X=n-k] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-5}\frac{5^n}{n!}\binom{n}{n-k}\frac{4^k}{5^n}$$

En utilisant la symétrie du coefficient binomial on écrit :

$$\mathbb{P}[Y=k] = e^{-5}4^k\sum_{n=k}^{+\infty}\binom{n}{k}\frac{1}{n!} = \frac{e^{-5}4^k}{k!}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$$

soit finalement $\mathbb{P}[Y=k] = e^{-5} \times e^{-1} \times \frac{4^k}{k!} = e^{-4}\frac{4^k}{k!}$, permettant de reconnaître une loi de Poisson de paramètre 4.

3. Les valeurs entières k et j étant fixées on calcule donc :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[X=k \cap Y=j] &= \mathbb{P}[X=k \cap N-X=j] = \mathbb{P}[N=k+j \cap X=k] \\
&= \mathbb{P}[N=k+j] \times \mathbb{P}_{[X=k]} = e^{-5}\frac{5^{k+j}}{(k+j)!} \times \binom{k+j}{k}\frac{4^{k+j-k}}{5^{k+j}} \\
&= e^{-5}\frac{1}{(k+j)!} \times \frac{(k+j)!}{k!j!}4^j = e^{-5}\frac{4^j}{k!}j!
\end{aligned}$$

Le calcul direct de $\mathbb{P}[X=k] \times \mathbb{P}[Y=j]$ fournit le même résultat en observant immédiatement que $e^{-1}e^{-4} = e^{-5}$.