

Vocabulaire des V.A.R. à Densité

Les notions données dans cette fiche s'appuient sur et complètent celle des Variables Aléatoires Réelles donnée en première année. En particulier, on considère connus les éléments de la section **Vocabulaire (et notations) des variables aléatoires** associée.

Eléments caractéristiques :

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ et on considère que X est une VAR à densité définie sur cet espace.

On remarquera que, en dehors de l'espérance, les définitions sont formellement identiques à celles des variables aléatoires discrètes. Il s'agit de garder à l'esprit que, la formule de l'espérance $\mathbb{E}[X]$ étant distincte, les concepts qui en découlent se fondent sur cette dernière.

- Densité** : On appelle *densité de probabilités* toute fonction f continue sur \mathbb{R} , sauf éventuellement en un nombre fini de points, positive sur \mathbb{R} et telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et vaut exactement 1.
- VAR à densité** : Toute variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X vérifie :
 - F_X est continue sur tout \mathbb{R} (sans exception)
 - F_X est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Indicateurs des VAR à densité :

On pourra désigner par f_X une densité de X et par F_X la fonction de répartition de X .

- Espérance** : Valeur, sous réserve de *convergence absolue*, définie par la formule : $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$
Remarque : Existence assurée si f_X est continue sur un segment I .
- Variance** : Valeur définie, sous couvert d'existence, comme : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$
Remarque : Définition invariante selon les cas discrets et continus.
- Ecart-type** : Sous-couvert d'existence de $\mathbb{V}[X]$, valeur $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$.
- Moment (d'ordre r)** : Avec $r \in \mathbb{N}^*$, valeur, sous couvert d'existence définie par la formule : $m_r[X] = \mathbb{E}[X^r]$
Remarque : Existence assurée si X est (presque-sûrement) finie. Le programme exige la connaissance du cas $r = 2$.
- VAR centrée** : On dit de X qu'elle est centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$.
- VAR réduite** : On dit de X qu'elle est réduite lorsque $\mathbb{V}[X] = 1$.
- VAR centrée-réduite** : On dit de X qu'elle est centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$ et que $\mathbb{V}[X] = 1$.
- VAR centrée-réduite associée** : On définit X^* associée à X comme : $X^* = \frac{1}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}[X])$ dès lors que $\sigma(X) \neq 0$ ce qui revient à demander X non presque-sûrement certaine