

## Vocabulaire des V.A.R. à Densité

Les notions données dans cette fiche s'appuient sur et complètent celle des Variables Aléatoires Réelles donnée en première année. En particulier, on considère connus les éléments de la section **Vocabulaire (et notations) des variables aléatoires** associée.

### Eléments caractéristiques :

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé  $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$  et on considère que  $X$  est une VAR à densité définie sur cet espace.

On remarquera que, en dehors de l'espérance, les définitions sont formellement identiques à celles des variables aléatoires discrètes. Il s'agit de garder à l'esprit que, la formule de l'espérance  $\mathbb{E}[X]$  étant distincte, les concepts qui en découlent se fondent sur cette dernière.

- Densité** : On appelle *densité de probabilités* toute fonction  $f$  continue sur  $\mathbb{R}$ , sauf éventuellement en un nombre fini de points, positive sur  $\mathbb{R}$  et telle que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et vaut exactement 1.
- VAR à densité** : Toute variable aléatoire  $X$  dont la fonction de répartition  $F_X$  vérifie :
  - $F_X$  est continue sur tout  $\mathbb{R}$  (sans exception)
  - $F_X$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  sauf éventuellement en un nombre fini de points.

### Indicateurs des VAR à densité :

On pourra désigner par  $f_X$  une densité de  $X$  et par  $F_X$  la fonction de répartition de  $X$ .

- Espérance** : Valeur, sous réserve de *convergence absolue*, définie par la formule :  $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$   
*Remarque* : Existence assurée si  $f_X$  est continue sur un segment  $I$ .
- Variance** : Valeur définie, sous couvert d'existence, comme :  $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]$   
*Remarque* : Définition invariante selon les cas discrets et continus.
- Ecart-type** : Sous-couvert d'existence de  $\mathbb{V}[X]$ , valeur  $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$ .
- Moment (d'ordre  $r$ )** : Avec  $r \in \mathbb{N}^*$ , valeur, sous couvert d'existence définie par la formule :  $m_r[X] = \mathbb{E}[X^r]$   
*Remarque* : Existence assurée si  $X$  est (presque-sûrement) finie. Le programme exige la connaissance du cas  $r = 2$ .
- VAR centrée** : On dit de  $X$  qu'elle est centrée lorsque  $\mathbb{E}[X] = 0$ .
- VAR réduite** : On dit de  $X$  qu'elle est réduite lorsque  $\mathbb{V}[X] = 1$ .
- VAR centrée-réduite** : On dit de  $X$  qu'elle est centrée lorsque  $\mathbb{E}[X] = 0$  et que  $\mathbb{V}[X] = 1$ .
- VAR centrée-réduite associée** : On définit  $X^*$  associée à  $X$  comme :  $X^* = \frac{1}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}[X])$  dès lors que  $\sigma(X) \neq 0$  ce qui revient à demander  $X$  non presque-sûrement certaine