

## Réduction des matrices : corrigés

**Exercice 18** On donne de façon synthétique les éléments caractéristiques de la diagonalisation de chaque matrice :

	A	B	C
$P_M(X)$	$X^2 - 25$	$(X - 1)^2(X + 1)$	$X^3 - 4X^2 + 4X$
$Sp(M)$	$\{-5; 5\}$	$\{-1; 1\}$	$\{0; 2\}$
$P$ : passage	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
$P^{-1}$	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

**Exercice 20** Soit  $f$  un endomorphisme diagonalisable de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  donné.

On a alors l'existence d'une base  $\mathcal{B} = (u_1 ; \dots ; u_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  composée de vecteurs propres de  $f$ , puisque les sous-espaces propres de  $f$  sont en somme directe pour former  $\mathbb{R}^n$ .

On considère alors que  $\forall i \leq n \ f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i$  où  $\lambda_i$  désigne une valeur propre de  $f$  dont  $u_i$  est un vecteur propre (donc non nul). D'après propriété établie en cours (donc, quitte à la redémontrer en recopiant la démonstration proposée) on a, pour tout polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  donné :

$$\forall i \leq n \ P(f)(u_i) = P(\lambda_i) \cdot u_i \implies u_i \in E_{P(\lambda_i)}(P(f))$$

Ce qui signifie en particulier que chacun des vecteurs  $u_i$  est un vecteur propre de  $P(f)$  (mais pas forcément associé à la valeur propre  $\lambda_i$ ). On a donc encore  $\mathcal{B}$  base de  $\mathbb{R}^n$  (parce que c'est un fait) mais aussi formée de vecteurs propres de  $P(f)$ . En conclusion,  $P(f)$  est donc diagonalisable puisqu'admet une base de vecteurs propres (similaire à  $f$ ).

*Remarque* : Attention ! En général, on ne peut pas assimiler les espaces  $E_{\lambda_i}(f)$  et  $E_{P(\lambda_i)}(P(f))$  tout simplement parce que  $P$  n'est en général pas injectif, ce qui permettrait d'avoir, pour  $P(f)$ , une valeur propre  $\mu = P(\lambda_i) = P(\lambda_j)$  unique associée à deux valeurs propres distinctes  $\lambda_i \neq \lambda_j$  de  $f$ .

C'est le cas en prenant  $f$  admettant  $n$  valeurs propres distinctes et  $P(X) = X^2$  avec  $n$  pair et  $Sp(f) = \{-n; \dots; -1; 1; \dots; n\}$

**Exercice 21** **Diagonalisabilité des projecteurs en dimension finie** On écrira dans ce corrigé  $ab = a \circ b$  par commodité, ceci se justifiant par l'interprétation matricielle des applications linéaires. De même, le contexte étant démuné d'ambiguïtés on pourra écrire  $id$  au lieu de  $id_E$ .

1.  $\mathcal{L}(E)$  est un espace vectoriel donc, par stabilité usuelles on a  $id - p = id + (-1) \cdot p \in \mathcal{L}(E)$

De plus, on calcule,  $id$  commutant avec tous les éléments de  $\mathcal{L}(E)$  :

$$(id - p)^2 = id^2 - 2id \cdot p + p^2 = id - 2p + p = id - p$$

Ce qui confirme que  $id - p$  est bien un projecteur de  $E$ .

2. Propriété de cours des projecteurs, mais on peut brièvement rappeler que :

$$\left. \begin{array}{l} x \in \text{Im}(p) \Rightarrow p(x) = x \\ x \in \text{Ker}(p) \Rightarrow p(x) = 0 \end{array} \right\} \implies \text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{x \in E \mid p(x) = x = 0_E\} = \{0_E\}$$

3. On gardera donc à l'esprit que  $q^2 = q$

(a) Le calcul direct donne  $(p + q)^2 = p + pq + qp + q = p + q$  d'où l'on tire  $pq + qp = O$  (endomorphisme nul). On pourrait dire que le produit  $pq$  est anti-commutatif :  $pq = -qp$ .

Composons à gauche par  $p$  :

$$p(pq) = p(-qp) \Rightarrow p^2q = -pqp \Rightarrow pq = -pqp$$

Par des procédés similaires de composition à gauche ou à droite par  $p$  ou par  $q$  on extrait  $qp = -pqp$  et  $qp = -qpq$  et  $pq = -qpq$  ce qui permet d'obtenir  $pq = qp$ . Finalement :

$$qp + pqp = O \Leftrightarrow pq + pq^2 = O \Leftrightarrow pq + pq = O \Leftrightarrow 2pq = O \Leftrightarrow pq = \frac{1}{2} \cdot O = O$$

D'où le résultat attendu.

(b) L'inclusion  $\text{Im}(p + q) \subset \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$  est immédiate et valable pour tous les endomorphismes  $p$  et  $q$  (sans l'hypothèse *projecteurs*).

Soit alors, réciproquement,  $y \in \text{Im}(p) + \text{Im}(q)$ .

On se donne alors  $x_1 \in \text{Im}(p)$  et  $x_2 \in \text{Im}(q)$  vérifiant  $y = p(x_1) + q(x_2)$ .

En composant à gauche par  $p$  on obtient  $p(y) = p^2(x_1) + pq(x_2) = p(x_1) + 0 = p(x_1)$  car  $pq = O$  et de façon analogue avec  $q$  composée à gauche on tire  $q(y) = q(x_2)$ .

En sommant ces résultats membre à membre, on tire :  $(p + q)(y) = p(y) + q(y) = p(x_1) + q(x_2) = y$  ce qui permet d'écrire que  $y \in \text{Im}(p + q)$

(c) L'inclusion  $\text{ker}(p) \cap \text{ker}(q) \subset \text{ker}(p + q)$  est immédiate et valable pour tous les endomorphismes  $p$  et  $q$  (sans l'hypothèse *projecteurs*).

Soit alors, réciproquement, soit  $x \in \text{ker}(p + q)$  donné. On a par définition  $p(x) + q(x) = 0$  donc  $p^2(x) + pq(x) = p(x) + 0 = 0$  et ainsi  $x \in \text{ker}(p)$ . Par raisonnement analogue en composant avec  $q$  à gauche, on déduit  $x \in \text{ker}(q)$  et ainsi  $x \in \text{ker}(p) \cap \text{ker}(q)$

4. On écrit tout simplement que  $id = (id - p) + p$  et on exploite les résultats qui précèdent en posant  $q = id - p$  qui est un projecteur d'après 1. vérifiant  $p + q$  est projecteur (puisque  $id$  est un projecteur trivial).

Le cours permet d'assurer que 0 et 1 sont les seules valeurs propres de  $p$  éventuellement. Notons alors  $E_0 = \text{ker}(p)$  et  $E_1 = \text{ker}(q) = \text{ker}(id - p)$ , éventuellement réduit(s) à  $\{0\}$ .

Nous en tirons  $E_0 \oplus \text{Im}(p) = \mathbb{R}^n = E_1 \oplus \text{Im}(id - p)$  d'après 2. et  $E_0 \cap E_1 = \text{ker}(id) = \{0\}$  par 3.(b) (ou vos connaissances sur les espaces propres en traitant les cas de projecteurs triviaux à part). On arrive à :

$$\text{Im}(p) + \text{Im}(id - p) = \text{Im}(id) = \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{rg}(p) + \text{rg}(id - p) \geq n$$

Par ailleurs, étudions  $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(id - p)$ . Si  $y$  en est un élément alors  $y = p(x_1) = (id - p)(x_2)$  pour de certains  $(x_1; x_2) \in E^2$ . De nouveau, en composant à gauche par  $p$  on en tire  $p(y) = p(x_1) = (p - p^2)(x_2) = 0$  et par un processus similaire avec  $(id - p)$  on obtient  $(id - p)(y) = (id - p)(x_2) = 0$ . Finalement, ceci conduit aux inclusions :

$$(1) \text{Im}(p) \cap \text{Im}(Id - p) \subset \text{ker}(p) \quad (2) \text{Im}(p) \cap \text{Im}(Id - p) \subset \text{ker}(id - p)$$

qui permettent d'en déduire  $\text{Im}(p) \cap \text{Im}(Id - p) \subset \text{ker}(p) \cap \text{ker}(id - p) = \text{ker}(id) = \{0\}$  et donc :

$$\text{Im}(p) \oplus \text{Im}(Id - p) \subset \mathbb{R}^n \Rightarrow \text{rg}(p) + \text{rg}(id - p) \leq n$$

Enfin,  $\text{rg}(p) + \text{rg}(id - p) = n$  permettant de remonter aux calculs des dimensions de  $\text{ker}(p)$  et  $\text{ker}(id - p)$  par le théorème du rang qui fourniront :

$$\dim(\text{ker}(p)) + \dim(\text{ker}(id - p)) = n - \text{rg}(p) + n - \text{rg}(id - p) = 2n - (\text{rg}(p) + \text{rg}(id - p)) = 2n - n = n$$

et comme  $E_0 \cap E_1 = \{0\}$  on a  $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^n$  permettant de conclure que  $p$  est diagonalisable (même si, en toute rigueur, on devrait distinguer le cas où  $p$  admet effectivement 0 et 1 comme valeurs propres du cas où l'une, au moins, ne serait pas valeur propre -mais ceci reviendrait à  $p$  est un projecteur trivial)