.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème I : $\ln$ a bien intégré les séries qu'elle a vues

On considère la fonction φ définie sur $]-\infty, 1]$ par :

$$\forall x \in\,]-\infty, 1], \quad \varphi(x) = \begin{cases} x + (1-x)\ln(1-x) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Partie A : Etude de la fonction φ

1. Montrer que la fonction φ est continue sur $]-\infty, 1]$.
2. (a) Justifier que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 1[$ et calculer $\varphi'(x)$, pour $x \in\,]-\infty, 1[$.
   (b) En déduire les variations de φ sur $]-\infty, 1]$.
   (c) La fonction φ est-elle dérivable en 1 ?
3. Calculer la limite de φ en $-\infty$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de φ en soignant le tracé aux voisinages de 0 et 1.
5. (a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t\,\ln(t)\mathrm{d}t$ converge et calculer sa valeur.
   (b) En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \varphi(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{4}$.

Partie B : Etude de deux séries

Soit x un réel appartenant à $[0, 1[$.

1. (a) Vérifier, pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout t de $[0, x]$: $\displaystyle\frac{1}{1-t} - \sum_{k=0}^{n-1} t^k = \frac{t^n}{1-t}$.
   (b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle-\ln(1-x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$.
2. (a) Montrer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\displaystyle 0 \leq \int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{(n+1)(1-x)}$.
   (b) En déduire la limite de $\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$.
   (c) Peut-on dire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$ est convergente pour chaque entier naturel n ?

BONUS Comparer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\lim_{x\to 1}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$ avec $\displaystyle\lim_{x\to 1}\lim_{n\to+\infty}\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\mathrm{d}t$

3. Montrer alors que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} \; = \; -\ln(1-x)$.

4. (a) Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n\,(n+1)} \; = \; \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1}$.

   (b) En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n\,(n+1)} \; = \; \varphi(x)$.

5. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(n+1)}$ converge et que l'on a encore : $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} \; = \; \varphi(1)$.

Problème 2 : Rayonnement Gamma

Soient a et p deux réels de $\mathbb{R}_+^*$. On définit une fonction $f_{a,p}$ sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_{a,p}(x) = e^{-px} x^{a-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)$$

où l'on note $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) = 1$ si $x > 0$ et 0 sinon ($x \leq 0$)

1. Justifier que, pour tout $(a;p) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,p}(x)\ \mathrm{d}x$ converge.
   On notera $K(a,p)$ sa valeur.
2. On pose $\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{a-1}\ \mathrm{d}u$. Etablir la convergence de cette intégrale pour $a > 0$.
3. Démontrer que, pour $a > 0$ et $p > 0$ on a :
$$K(a;p) = \frac{\Gamma(a)}{p^a}$$
4. Montrer que, pour tout $a > 0$, on a $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.
5. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $\Gamma(n+1) = n!$ (*on pourra raisonner par récurrence*).
6. *Application :* Déterminer la valeur de :
$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 - 2x + 1}{e^{2x}}\ \mathrm{d}x$$
   après en avoir justifié la convergence.
7. Démontrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u$ converge puis que l'on a la relation :
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u$$

Problème 3 : Autour des urnes en probabilités

Partie 0 : qui ne compte pas zéro

Les résultats de cette partie pourront être admis si besoin dans les parties suivantes.
Dans cette partie, on considère k, n et N des entiers naturels non nuls avec $k \leq n$ et $k \leq N$.

1. Démontrer que $n\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k}k$
2. Etablir que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$
3. Montrer que : $\sum_{n=k}^{N} \binom{n}{k} = \binom{N+1}{k+1}$ (*On pourra raisonner par récurrence sur N*)

Partie 1 : On ne perd pas la boule

Dans cette partie, on considère une urne $\mathcal{U}$ contenant $N \in \mathbb{N}^*$ boules indiscernables au toucher, numérotées de 1 à N.

1. Dans une première expérience $\mathcal{E}$, on tire successivement **avec remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du numéro 1. On note alors X le nombre de tirages effectués.
   Quelle est la loi de X ? En préciser les paramètres (*des justifications rigoureuses sont attendues*)
2. Dans une seconde expérience $\mathcal{F}$, on tire successivement **sans remise** les boules une par une, jusqu'à tirer la boule marquée du numéro 1. On note alors Y le nombre de tirages effectués.
   Démontrer soigneusement que Y suit la loi uiniforme sur $\{1\ ;\ \dots\ ;\ N\}$
3. Dans une troisième expérience $\mathcal{H}$, on effectue un tirage de $r \leq N$ (non nul) boules
   Quelle est la loi de X ? En préciser les paramètres (*des justifications rigoureuses sont attendues*) **sans remise** et l'on note Z le nombre de boules tirées et marquées d'un numéro inférieur ou égal à $m \in \{1\ ;\ \dots\ ;\ N\}$.
   Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$ et $n \leq r$. Montrer que :
   $$\mathbb{P}[Z = n] = \frac{\binom{m}{n}\binom{N-m}{r-n}}{\binom{N}{r}}$$

Partie 2 : Et on répète...

On suppose dans cette partie que l'on tire successivement et sans remise $k \leq N$ boules de l'urne $\mathcal{U}$ (avec $k \neq 0$).
On note $X_1, X_2, \dots, X_k$ les numéros du tirage et on définit $Z_k = \max(X_1\ ;\ \dots\ ;\ X_k)$.

1. Soit $n \leq N$ un entier naturel fixé. Exprimer, en fonction de n, N et k la valeur de $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{k}[X_i \leq n]\right)$
2. Démontrer que l'on a, pour n entier vérifiant $k \leq n \leq N$:
   $$\mathbb{P}[Z_k = n] = \frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{N}{k}}$$
3. Quelle est la valeur de $\mathbb{P}[Z_k = n]$ si l'entier n vérifie $0 \leq n < k$?
4. Vérifier que $\mathbb{E}[Z_k] = \dfrac{k}{k+1}(N+1)$
5. Calculer $\mathbb{E}\left[\dfrac{k+1}{k} Z_k - 1\right]$ pour $0 < k \leq N$.

Problème 4 : On a, b, c la matrice Attila

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a,b,c) \ = \ \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on rappelle que le cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$ est le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.

On notera dans ce problème $\operatorname{card}\big(\{a, b, c\}\big)$ le cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$.

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est inversible } \Leftrightarrow \ ab + bc + ac + abc \neq 0$$

sans faire usage de la notion de déterminant d'une matrice

Partie A : Généralités

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   (a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut pas admettre une unique valeur propre.
   On pourra par exemple raisonner par l'absurde.
   (b) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.
3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M(a, b, c)$.
   (a) Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.
   (b) En déduire que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres.
   (c) De la même façon, montrer que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a, b, c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a, b, c).

Partie D : Cas où card$\big(\{a, b, c\}\big) = 3$

1. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
   On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a, b, c\}$ par :
$$\forall x \in D, \quad g(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$
   (a) Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a, de b et de c.
   (b) En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3, vérifiant : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.
   (c) Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.
   On note X_λ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} (\lambda-a)^{-1} \\ (\lambda-b)^{-1} \\ (\lambda-c)^{-1} \end{pmatrix}$.
   Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ.
   (d) En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.
2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que card$\big(\{a, b, c\}\big) = 3$.
   (a) Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.
   (b) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a, b, c)$.
3. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que la matrice A est inversible.
   (b) On note α la plus grande valeur propre de A. Montrer que $4 < \alpha < 5$.

En guise de Devoir Maison : traitons les autres cas

Les sections suivantes traitent les cas où $\text{card}\big(\{a,b,c\}\big) \neq 3$ et complètent le problème proposé en Concours Blanc n°2.
Nous rappelons que l'usage du déterminant n'est pas autorisé pour ce problème et nous invitons les candidats à vérifier que le recours au calcul de $\det(M(a;b;c))$ produit la propriété $(*)$ de façon très rapide.

Partie B : Cas où card$\big(\{a,b,c\}\big) = 1$

1. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $H = M(0,0,0)$.
   (a) Calculer H^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de H.
   (b) En déduire les valeurs propres de H et préciser une base des sous-espaces propres de H.
   (c) Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $H = PDP^{-1}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Vérifier : $M(a,a,a) = P\,(a\,I_3 + D)\,P^{-1}$.
   (b) En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.
   (c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,a)$.

Partie C : Cas où card$\big(\{a,b,c\}\big) = 2$

1. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
   On note $C = M(0,0,c)$.
   (a) Justifier que 0 est une valeur propre de C.
   (b) Soit λ un réel non nul et soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer l'équivalence :
   $$CX \;=\; \lambda \cdot X \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ z = (\lambda - 2)\,x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\,x = 0 \end{array} \right.$$
   et en déduire : λ est une valeur propre de $C \;\Leftrightarrow\; \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.
   (c) Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.
2. Soit $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.
   (a) Exprimer $M(a,a,c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0,0,c-a)$.
   (b) En déduire que la matrice $M(a,a,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.
   (c) Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.
3. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\text{card}\big(\{a,b,c\}\big) = 2$. Expliquer brièvement comment vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas à partir des résultats qui précèdent et des conclusions de la partie A.