Concours Blanc C_3

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème I : Le spectre de l' Algèbre Linéaire plane sur le sujet

Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $A^2 = A$. La notation I_2 désignera alors la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. (a) Soit λ une valeur propre de A. Quelles sont les valeurs possibles de λ ?
   (b) Démontrer que $\ker(A) = \ker(A^2)$.
2. On suppose dans cette question que $\ker(A)$ est de dimension 1.
   (a) Construire un vecteur $x \in \mathbb{R}^2$ associé à la valeur propre 1 vérifiant $x \notin \ker(A)$.
   (b) En déduire que A est diagonalisable et exprimer A dans une base où A est diagonale.
   On fournira alors la base choisie.
3. On suppose maintenant que $\ker(A) = \{0\}$. Montrer qu'alors $A = I_2$.
4. Décrire enfin toutes les matrices A de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ vérifiant $A^2 = A$
5. Justifier que toute matrice M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ *non* diagonalisable admet 0 ou 1 valeur propre (réelle) exactement.
6. Démontrer enfin que $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est non diagonalisable si, et seulement si, M n'est pas diagonale et M admet au plus une valeur propre (réelle).

D'après concours ens-D2 - Paris Saclay 2019

Problème II : Un sujet de concours récursif

Deux candidates, Alice et Béa, se présentent à un concours, la première étant plus averse au risque. On pose A et B leurs notes respectives et on modélise l'aversion au risque de la façon suivante :
— A suit une loi uniforme discrète sur $[|9; 11|]$
— B suit une loi uniforme discrète sur $[|8; 12|]$
— A et B sont indépendantes.

Partie 1 : Alice, Béa et C'est tout !

1. Calculer les espérances respectives des variables (aléatoires) A et B
2. Calculer leurs variances respectives.
3. Le concours retient la candidate ayant la meilleure note, mais en cas d'égalité, personne n'est sélectionné.
   (a) Quelle est la probabilité que $A = B$?
   (b) Conditionnellement à $B = 10$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
   (c) Dans le cas général, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
   (d) Quelle est la probabilité qu'Alice soit sélectionnée ?

Partie 2 : ABBA participent maintenant au concours

On suppose désormais qu'il y a deux candidates supplémentaires : Aria et Bénédicte. Il n'y malgré cela qu'une seule place au concours.
Aria et Alice ont la même aversion au risque et on note A' sa note, qui suit alors la même loi que A. Bénédicte et Béa ont la même aversion au risque et on note B' sa note, qui suit alors la même loi que B.
On suppose enfin que toutes ces variables aléatoires sont mutuellement indépendantes.

1. Quelle est la probabilité que $B = 12$?
2. Conditionnellement à $B = 12$, quelle est la probabilité que Béa soit sélectionnée ?
3. Dans le cas général, quelle est la probabilité qu'Aria soit sélectionnée ?
4. Quelle est la probabilité que Béa ou Bénédicte soi sélectionnée ?

Partie 3 : Aria stacks with n-idle

On observe à présent $n \geq 5$ valeurs $X_1 \dots X_n$ supposées mutuellement indépendantes parmi lesquelles :
— On trouve une proportion $p \in]0;1[$ de variables aléatoires de même loi que A
— Les variables aléatoires ne suivant pas la même loi que A suivent la même loi que B.

1. On suppose que la première candidate est averse au risque, quelle est alors la loi conditionnelle de sa note X_1 ?
2. Même question s'il s'agit d'une candidate non averse au risque.
3. En déduire la loi non conditionnelle de X_1
4. Calculer l'espérance de X_1
5. Calculer la variance de X_1
6. On pose $V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - 10)^2$ et on admet que V_n définit alors une variable aléatoire réelle.
   (a) Déterminer l'espérance de V_n
   (b) Pour $k \leq n$ fixé, déterminer la valeur de $\mathrm{Cov}(V_n; X_k)$ en fonction de n et de k.
   (c) En déduire la variance de V_n en fonction de n.

D'après concours ens-D2 - Paris Saclay 2019[1]

Probblème III : Etude d'une VAR à densité logarithmique

Soit $\theta > 0$ un réel fixé. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\theta}\ln\left(\frac{\theta}{|x|}\right) & \text{si } x \in [-\theta;\theta]\ ;\ x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie 1 : f est une densité

1. Etudier la parité de f.
2. Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(u)\,\mathrm{d}u$ est convergente et que sa valeur est -1.
3. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\theta} f(x)\mathrm{d}x$.
   (a) Etablir que I est convergente.
   (b) Démontrer que $I = \frac{1}{2}$
4. Etablir que f est une densité de probabilité.

1. Les noms, notations et tournures du sujet d'origine n'ont pas été modifiés

Partie 2 : Etude d'une VAR de densité f

Dans cette partie, X est une variable aléatoire réelle de densité f. On pourra donc admettre que f est bien une densité de probabilités pour traiter cette partie.
On désignera par F_X la fonction de répartition de la variable aléatoire X.

1. Déterminer une expression de $F_X(t)$ pour $t \in]0;\theta]$.
2. En déduire une description de F_X sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer l'allure de F_X dans le cas $\theta = 1$
4. Démontrer que X est centrée.
5. Démontrer que X admet une variance puis la déterminer.
6. Pour quelle(s) valeur(s) de $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ a-t-on que X est centrée-réduite ?

Problème IV : Etude d'un fonction hyper tangente

On considère la fonction f de deux variables réelles par :

$$f(x;y) = \frac{x+y}{1+xy}$$

où l'on notera $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ son domaine de défintion.

Partie 1. Etude topologique du domaine de définition

1. Déterminer, en justifiant, la nature topologique du domaine $\mathcal{D}$ (ouvert, fermé, convexe, borné)
2. On définit $K = [-1;1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ et on pose $\mathcal{A} = K \cap \mathcal{D}$.
   Justifier que $\mathcal{A}$ est borné puis déterminer son adhérence $\overline{\mathcal{A}}$ ainsi que son intérieur $int(\mathcal{A})$ (on ne demande pas de justifier ces deux derniers éléments).
3. La fonction f admet-elle une limite en $(-1;1)$? en $(1;-1)$? Justifier.

Etude analytique de la fonction

Dans cette partie, on restreint la fonction f au domaine $[-1;1]^2 \backslash \{(-1;1);(1;-1)\}$ que l'on pourra noter A.
On définit alors, pour $a \in [-1;1]$, les fonctions $g_a : x \mapsto f(x;a)$ ainsi que $h_a(y) = f(a;y)$

1. Vérifier que, si $a \notin \{-1;1\}$, les fonctions g_a et h_a sont bien définies sur $[-1;1]$
2. Comparer $g_a(x)$ et $h_a(x)$ pour $x \in]-1;1[$.
3. Décrire la fonction g_1 et établir qu'elle admet un prolongement par continuité sur $[-1;1]$ que l'on donnera.
   Procéder à une étude similaire pour g_{-1}.
4. Partie 2. Etude de g_a pour $a \in]-1;1[$:
   (a) Démontrer que g_a est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[-1;1]$ pour $a \in]-1;1[$.
   (b) Dresser le tableau complet des variations de g_a pour $a \in]-1;1[$
   (c) Etudier la convexité de g_a sur $[-1;1]$, pour $a \in]-1;1[$.
   (d) Peut-on dire que, pour tout $a \in]-1;1[$, la courbe représentative $\mathcal{C}_{g_a}$ de g_a admet un point d'inflexion ?
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative $\mathcal{C}_{g_{1/2}}$ de $g_{1/2}$ dans un repère othonormé.
5. Réaliser, de façon synthétique, une étude similaire de h_a pour $a \in]-1;1[$.
6. Démontrer que l'on $f(A) \subset [-1;1]$. Peut-on dire que $f(A) = [-1;1]$?
7. En déduire le maximum et le minimum de f réalisés sur le domaine A.