.

Epreuve de Mathématiques et Statistiques

Durée : quatre heures

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdite

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

.

Avant-propos

Dans cette épreuve, il est attendu des candidats une attention toute particulière aux justifications. Les propriétés, théorèmes devront être mentionnés avec leurs hypothèses et les définitions employées rappelées si besoin.
On veillera à limiter les abus de notation et rester dans le cadre du programme établi pour le concours ens D2.

Exercice 1

Partie A

Pour tout couple de réels (x,y), on définit la matrice $M(x,y)$ par :

$$M(x,y)=\begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$

On appelle E l'ensemble des matrices $M(x,y)$ où x et y décrivent $\mathbb{R}$:

$$E=\left\{M(x,y),\quad (x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

On note $A=M(1,0)$ et $B=M(0,1)$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.
2. Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de A et déterminer les espaces propres associés. A est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer une matrice inversible P de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :

$$A=PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

4. Déterminer P^{-1} (faire figurer le détail des calculs sur la copie).
5. En notant X_1, X_2 et X_3 les trois vecteurs colonnes formant la matrice P, calculer BX_1, BX_2 et BX_3.
   En déduire l'existence d'une matrice diagonale D_B que l'on explicitera telle que :

$$B=PD_BP^{-1}.$$

6. En déduire que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x,y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$M(x,y)=PD(x,y)P^{-1}.$$

7. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur (x,y) pour que $M(x,y)$ soit inversible.
8. Montrer que B^2 est un élément de E. La matrice A^2 est-elle aussi un élément de E ?

Partie B

On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0=1$, $b_0=0$, $c_0=0$ et les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} a_{n+1} &= 3a_n+4b_n-c_n \\ b_{n+1} &= -4a_n-5b_n+c_n \\ c_{n+1} &= -6a_n-8b_n+2c_n \end{cases}$$

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $X_n=\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

1. Que vaut X_0 ?
2. Déterminer une matrice C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$X_{n+1} = CX_n.$$
Déterminer ensuite deux réels x et y tels que $C = M(x, y)$.
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^n X_0$.
4. À l'aide des résultats de la partie A, exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $g_n : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par :
$$g_n(x) = \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}.$$
   (a) Étudier les variations de la fonction g_0, définie sur $[0, +\infty[$ par : $g_0(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.
   Préciser la limite de g_0 en $+\infty$, donner l'équation de la tangente en 0, et donner l'allure de la courbe représentative de g_0.
   (b) Pour $n \geqslant 1$, justifier que g_n est dérivable sur $[0, +\infty[$ et montrer que :
$$\forall x \in [0, +\infty[, \qquad g_n'(x) \geqslant 0 \iff n \geqslant 2\ln(1+x).$$
   En déduire les variations de la fonction g_n lorsque $n \geqslant 1$.
   Calculer soigneusement $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x)$.
   (c) Montrer que, pour $n \geqslant 1$, g_n admet un maximum sur $[0, +\infty[$ qui vaut :
$$M_n = \left(\frac{n}{2e}\right)^n$$
   et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} M_n$.
   (d) Montrer enfin que pour tout $n \geqslant 1$:
$$g_n(x) \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$I_n = \int_0^{+\infty} g_n(t)dt.$$
   (a) Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
   (b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
   (c) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = (n+1)I_n$$
   (d) En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = n!.$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_n par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{n!}\, g_n(x) & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une densité de probabilité.

On considère à présent, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n une variable aléatoire réelle admettant f_n pour densité.
On notera F_n la fonction de répartition de X_n.

(b) La variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ?

(c) Que vaut $F_n(x)$ pour $x < 0$ et $n \in \mathbb{N}$?

(d) Calculer $F_0(x)$ pour $x \geqslant 0$.

(e) Soit $x \geqslant 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :

$$F_k(x) - F_{k-1}(x) = -\frac{1}{k!}\frac{(\ln(1+x))^k}{1+x}$$

(f) En déduire une expression de $F_n(x)$ pour $x \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ faisant intervenir une somme (on ne cherchera pas à calculer cette somme).

(g) Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, déterminer la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(h) La suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle en loi ?

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $Y_n = \ln(1 + X_n)$.

(a) Justifier que Y_n est bien définie. Quelles sont les valeurs prises par Y_n ?

(b) Justifier que Y_n admet une espérance et la calculer.

(c) Justifier que Y_n admet une variance et la calculer.

(d) On note H_n la fonction de répartition de Y_n. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = F_n(e^x - 1).$$

(e) Montrer que Y_n est une variable aléatoire à densité et donner une densité de Y_n.

(f) Reconnaître la loi de Y_0. À l'aide de ce qui précède, déterminer le moment d'ordre k de Y_0 pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

[*D'après ECRICOME-2016 voie E*]

Exercice 3

Soit $\Omega = \{\omega_1\ ;\ \dots\ ;\ \omega_n\}$ un ensemble fini où $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega\ ;\ \mathcal{P}(\Omega))$. On notera $p_i = \mathbb{P}(\{\omega_i\})$ et on rappelle que tout $E \subset \Omega$ est un événement.
Pour tout couple $(X; Y)$ de variables aléatoires réelles définies sur Ω, on définit le réel noté $\langle X; Y\rangle$ par :

$$\langle X; Y\rangle = \mathbb{E}[XY]$$

1. Démontrer que l'ensemble des variables aléatoires à valeurs réelles sur Ω est un espace vectoriel que l'on notera $\mathcal{E}$ dans la suite.
2. Montrer que $\langle\ ;\ \rangle$ définit un produit scalaire sur $\mathcal{E}$ si, et seulement si, on a $\forall i \leq n\ \ p_i > 0$
3. Dans cette question, on suppose que les variables aléatoires réelles X et Y définies sur Ω sont centrées (en 0).
Donner une relation liant $\langle X; Y\rangle$ et $cov(X; Y)$.
Dans la suite du problème, on suppose que l'on a effectivement $p_i > 0$ **pour tout** $i \in [\![1; n]\!]$
4. Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, on définit l'indicatrice de A notée $\mathbb{1}_A$ comme application de Ω dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{1}_A : \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \left\{\begin{array}{ll} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{array}\right. \end{array}$$

(a) Justifier que, pour tout $A \subset \Omega$, l'application $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire définie sur l'espace probabilisé$(\Omega\ ;\ \mathcal{P}(\Omega)\ ;\ \mathbb{P})$

(b) Démontrer que pour tous $(A; B) \in \mathcal{P}(\Omega)^2$ on a $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$ (produit)

(c) Etablir que, pour tout $A \subset \Omega$, on a $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$

(d) Montrer que pour tous sous-ensembles A et B de Ω, les événements A et B sont indépendants si, et seulement si, $cov(\mathbb{1}_A; \mathbb{1}_B) = 0$

Dans la suite, on écrira $||X|| = \sqrt{\langle X; X\rangle}$ pour tout $X \in \mathcal{E}$. De plus, si x est un réel, on pourra confondre (en termes de notations) la variable aléatoire (de $\mathcal{E}$) constante égale à x avec x lui-même.

5. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ donné, on définit la condition $(\mathcal{C})$ par :

$$(\mathcal{C}) : \quad \forall x \in \mathbb{R} \ \ ||X - \lambda||^2 \leq ||X - x||^2$$

L'objet de cette question est déterminer les réels λ vérifiant la condition $\mathcal{C}$.

(a) Démontrer que la condition $(\mathcal{C})$ est vérifiée si, et seulement si :

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ x^2 - 2x\mathbb{E}[X] + 2\lambda\mathbb{E}[X] - \lambda^2 \geq 0$$

(b) En étudiant le trinôme du second degré (en x) ci-dessus, montrer que la condition $(\mathcal{C})$ est vérifiée si, et seulement si, λ vérifie l'équation :

$$\mathbb{E}[X]^2 - 2\lambda\mathbb{E}[X] + \lambda^2 = 0$$

(c) En déduire que la condition $(\mathcal{C})$ est vérifiée si, et seulement si, $\lambda = \mathbb{E}[X]$.

[*D'après ensD2-2010*] .

Exercice 4

On considère une action boursière sur n périodes : elle sera caractérisée par ses valeurs v_t à chaque date t, c'est-à-dire par les valeurs v_0 à la date $t = 0$, v_1 à la date $t = 1, \ldots$, v_n à la date $t = n$.

On suppose que la valeur de l'action ce jour est de $v_0 = 1$ et qu'à chaque période, la valeur de l'action peut être multipliée par un facteur $a > 1$ avec une probabilité $p \in]0; 1[$ ou être multipliée par un facteur $\frac{1}{a}$ avec une probabilité $q = 1 - p$.
On suppose enfin que les événements successifs de hausse ou de baisse de l'action sont mutuellement indépendants.

1. Dans cette question, on se place dans le cas $n = a = 2$.
Donner à chaque date t de $[\![0; 2]\!]$ les valeurs possibles de l'action étudiée.
Si vous savez que la valeur finale v_2 de l'action est supérieure ou égale à 1, quelle est la probabilité pour qu'il y ait eu une hausse en première période ? On exprimera cette probabilité en fonction de p uniquement.

Représenter graphiquement la fonction de répartition de la variable aléatoire v_2 lorsque $p = 0,75$.
2. On revient au cas général.
On note Z la variable aléatoire égale au nombre de hausses sur les n périodes. Quelle et la loi de Z ? En donner l'espérance et la variance.
Expliciter, pour tout $k \in [\![0; n]\!]$ le probabilité $\mathbb{P}[Z = k]$ en fonction de k, n et p.
3. Donner la valeur v_n de l'action à la dernière date en fonction de Z, de a et de n.
4. Montrer que $Z = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\ln(v_n)}{\ln(a)} + n\right)$.
5. Dans cette question, on prend $a = 2$, $n = 7$ et $p = 0.5$.
En admettant que la loi de Z peut être approchée par une loi normale de même espérance et variance que Z, donner une valeur approchée de $\mathbb{P}[v_n \geq 2]$.
On pourra utiliser la table de loi normale donnée en fin de sujet ainsi que $\dfrac{1}{\sqrt{7}} \approx 0.38$
6. On se place toujours dans le cas $a = 2$, $n = 7$ et $p = 0.5$.
Montrer que $\mathbb{P}[v_n \geq 2] = \dfrac{1}{2}$. Obtient-on le même résultat qu'en 5) ? Expliquer pourquoi.

[*D'après ensD2-2008*]