.

Epreuve de Mathématiques et Statistiques

Durée : quatre heures

Aucun document n'est autorisé

L'usage de toute calculatrice est interdite

Recommandation : les exercices et problèmes doivent être traités en respectant l'ordre préétabli

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

.

Avant-propos

Dans cette épreuve, il est attendu des candidats une attention toute particulière aux justifications. Les propriétés, théorèmes devront être mentionnés avec leurs hypothèses et les définitions employées rappelées si besoin.
On veillera à limiter les abus de notation et rester dans le cadre du programme établi pour le concours ens D2.

Problème I

On rappelle que le nombre e est une constante qui vaut environ $2,718$.

1. Déterminer sur $\mathbb{R}$ le tableau de variation de la fonction $f_1(x) = e^x - x - 1$.
   En déduire que, pour tout réel x on a $e^x \geq 1 + x$.
2. On considère la fonction g définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = \displaystyle\int_0^1 e^{xu}\, du$
   (a) Justifier que la fonction g est bien définie sur $\mathbb{R}$
   (b) Montrer que g est croissante au sens large sur $\mathbb{R}$
   (c) Montrer que g est continue en 0
3. Etablir que :
   $$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ \frac{e^x - 1}{x} & \text{si} \quad x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$
   et en déduire que g est continue sur $\mathbb{R}$ (sauf éventuellement en $x = 0$)
4. Déterminer sur $[-1; 1]$ le tableau de variations de la fonction $f_2(x) = e^x - x^2 - x - 1$.
   En déduire que pour tout $x \in [-1; 1]$ on a $e^x \leq 1 + x + x^2$
5. (a) Montrer que si $x \neq 0$, alors g est dérivable en x et calculer $g'(x)$.
   (b) Etablir que, pour $x \in [-1; 1]$ on a :
   $$1 + \frac{1}{2}x \ \leq \ g(x) \ \leq \ 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2$$
   En déduire que g est dérivable en 0 et que $g'(0) = \dfrac{1}{2}$
6. On considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
   $$H : (x; y) \mapsto \begin{cases} \frac{e^{x-y} - 1}{x - y} & \text{si} \ \ x \neq y \\ 1 & \text{si} \ \ x = y \end{cases}$$
   (a) Démontrer que H est continue sur $\mathbb{R}^2$
   (b) Déterminer, après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles : $\dfrac{\partial H}{\partial x}(1; 0)$ et $\dfrac{\partial H}{\partial y}(1; 0)$
   (c) Déterminer, après avoir justifié leur existence, les dérivées partielles : $\dfrac{\partial H}{\partial x}(0; 0)$ et $\dfrac{\partial H}{\partial y}(0; 0)$

[*D'après ensD2-2008*]

Problème II

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k pour $k \in [\![1; 6]\!]$.
Le dé a été pipé de sorte que :

- Les nombres $(p_i)_{i \leq 6}$ sont les (premiers) termes (consécutifs) d'une suite arithmétique.

- Les nombres p_1, p_3 et p_6 sont, dans cet ordre, trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que $p_k = \dfrac{3+k}{39}$ pour $1 \leq k \leq 6$.
2. On lance le dé une fois et on considère les événements suivants :
   A : "Le nombre obtenu est pair."
   B : "Le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3"
   C : "Le nombre obtenu est 3 ou 4."
   (a) Calculer les probabilités respectives des événements A, B et C.
   (b) Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.
   (c) Les événements A et B sont-ils indépendants ? Les événements A et C sont-ils indépendants ?
3. On va lancer 60 fois ce dé et l'on vous propose de parier : *Pour chaque tirage, vous gagnez un euro si le tirage est pair et vous perdez un euro sinon.*
   (a) En justifiant votre réponse, pouvez-vous considérer que parier ainsi vous est favorable ?
   (b) On procède effectivement aux 60 lancers et on confine les résultats obtenus dans le tableau suivant :

k	1	2	3	4	5	6
n_k	6	6	9	11	12	16

   où n_k désigne le nombre de fois où la face portant le numéro k a été obtenue lors de ces lancers.
   Quel est le gain final à l'issue de ces lancers, en appliquant les règles du pari proposé ?
   (c) Proposer une estimation ponctuelle de la probabilité de A au regard de ces résultats.

[*D'après ensD2-2011*]

Problème III

Soit E un espace vectoriel de dimension 4. On définit φ, un endomorphisme de E vérifiant : $\forall x \in E \quad (\varphi \circ \varphi)(x) = -x$

1. Justifier que φ est injective de E dans E.
2. En déduire que φ est un automorphisme de E.
3. On se donne $u \in E$ vecteur non nul. Justifier l'existence de $v \in E$ tel que $v \notin \text{vect}(u; \varphi(u))$.
4. Démontrer que, u et v étant définis selon l'énoncé qui précède, on a que $\mathcal{B} = (u; \varphi(u); v; \varphi(v))$ est une base de E.
5. On donne une matrice A carrée d'ordre 4 vérifiant $A^2 = -I_4$ (matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$).
   Etablir que A est semblable à la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Problème IV

Première Partie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(p; q) \in \mathbb{R}^2$ fixés. On considère la fonction $B_{(n;p;q)}$ définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$B_{(n;p;q)}(k) = \begin{cases} C_n^k p^k q^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{si } k > n \end{cases}$$

où l'on a noté C_n^k le coefficient binômial $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. Dans la suite, on pourra désigner la fonction $B_{(n;p;q)}$ par la seule lettre B.

1. Pour quelles valeurs de p et q la définition de B induit-elle une loi de probabilté ?
   On considérera désormais que ces conditions sont remplies (et donc, par abus de langage, que B est une loi de probabilité)
2. Décrire une expérience correspondant à cette loi.
3. Reconnaître cette loi.
4. Soit X une variable aléatoire de loi B. <u>Calculer</u> son espérance.

Seconde Partie

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $B = B_{(n;p;q)}$, où p et q remplissent les conditions permettant à l'obtention d'une loi de probabilité.
Pour $k \geq 1$, on pose $M_k = \max\limits_{1\leq i\leq k} X_i$ et suppose que n, p et q sont inconnus (mais fixés). On se propose de les estimer.

1. Déterminer $\mathbb{P}[X_0 \leq n-1]$.
2. En déduire $\mathbb{P}[M_k = n]$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ donné.
3. Proposer un estimateur “raisonnable" [1] de n en justifiant.
4. En s'aidant de la première partie, proposer un estimateur “raisonnable" de p (des justifications sont attendues)

Troisième Partie

Dans cette partie, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées selon la loi B avec $p = \frac{1}{n}$ et $q = \frac{n-1}{n}$.

1. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$
2. Donner un équivalent, pour n au voisinage de $+\infty$, de $\dfrac{n!}{(n-k)!} \cdot \dfrac{1}{n^k}$
3. En déduire la convergence, pour k fixé :
$$\mathbb{P}[X_n = k] \to \frac{e^{-1}}{k!}$$
lorsque n tend vers $+\infty$.

[*D'après ensD2-2013*]

Problème V

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(m)$ avec $m > 0$ donné. On rappelle alors que la fonction : $f_m(x) = me^{-mx}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est alors une densité de X.

1. Calculez la fonction de répartition notée F_m de X.
2. Démontrer que la fonction F_m est inversible sur $\mathbb{R}_+$ déterminer son inverse F_m^{-1} sur $\mathbb{R}_+$.
3. On définit une nouvelle variable aléatoire Y par $Y = F_m(X)$.
   (a) Pour $t \in [0;1[$ calculer la probabilité $\mathbb{P}[Y \leq t]$
   (b) En déduire la valeur de $\mathbb{P}[Y \leq t]$ pour $t \in \mathbb{R}$ quelconque.
   (c) Démontrer que Y est à densité puis déterminer une densité de Y. Quelle est la loi de Y ?
4. Démontrer que l'on peut simuler un tirage x_i selon la loi $\mathcal{E}(m)$ à partir d'un tirage u_i de loi uniforme sur $[0;1]$.
5. Etablir que l'on peut simuler la moyenne arithmétique de n tirages $(x_1 \dots x_n)$ de la loi $\mathcal{E}(m)$ à partir de la moyenne géométrique $g(u_1 \dots u_n)$ de n tirages $(u_1 \dots u_n)$ de la loi uniforme sur $[0;1]$.
   On rappelera que la moyenne géométrique est donnée par la formule :
$$g(u_1 \dots u_n) = \prod_{i=1}^{n} \sqrt[n]{u_i}$$

[*D'après ensD2-2012*]

1. *[dixit sujet d'origine]*