.

Comparaison Locale

Nous proposons ici une synthèse et des compléments sur l'emploi des équivalents et des petits o

Fonctions négligeables

On rappelle que la notation $f = o(g)$, employée au voisinage de a (les considérations en a lui-même étant exclues) signifie, de façons équivalentes :
i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$
ii) Il existe une fonction ε de limite nulle en a vérifiant, sur un voisinage de a -sauf éventuellement en a- $f(x) = \varepsilon(x) \times g(x)$
On retiendra que cette notion est introduite de sorte à remplacer l'écriture $x^n\varepsilon(x^n)$ des développements limites (au voisinage de 0) par $o(x^n)$. A ce titre, l'exemple fondamental à retenir est donc que $p > n \;\Rightarrow\; x^p = o(x^n)$ au voisinage de 0.
Attention ! Cette dernière relation est renversée au voisinage de $+\infty$.

Structure

Fixons g, une fonction, et $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble des fonctions f vérifiant $f = o(g)$ au voisinage de a est un espace-vectoriel. La notation de Landau $f = o(g)$ est une façon abusive d'écrire en réalité $f \in o(g)$. Par commodité, on écrit aussi souvent $f(x) = o(g(x))$ et on omet d'écrire a sous le o.
Par ailleurs, en notation de Hardy on écrit $f << g$ ce qui traduit d'une relation d'ordre stricte.
On peut également procéder aux multiplications de o à condition d'écrire un produit également dans le o soit :

$$\begin{cases} f(x) = o(\varphi(x)) \\ h(x) = o(\psi(x)) \end{cases} \text{ au voisinage de } a \quad \Longrightarrow \quad f(x)h(x) = o(\varphi(x)\psi(x)) \quad \text{au voisinage de } a$$

En particulier, dans l'optique de la production de $DL_n(0)$ (donc au voisinage de 0) on retiendra :

$$\begin{array}{llllll} i) & o(x^n) = -o(x^n) & ii) & o(x^n) + o(x^n) = o(x^n) & iii) & f(x) \;+\; ax^{n+p} + o(x^n) = f(x) \;+ o(x^n) \\ iv) & f(x) \times o(x^n) = o(x^n f(x)) & v) & o(x^n) - o(x^n) = o(x^n) \neq 0 & vi) & f(x) = o(1) \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 \end{array}$$

Fonctions équivalentes

On rappelle que la notation $f \sim g$, employée au voisinage de a (les considérations en a lui-même étant exclues) signifie, de façons équivalentes :
i) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$
ii) Il existe une fonction λ de limite 1 en a vérifiant, sur un voisinage de a -sauf éventuellement en a- $f(x) = \lambda(x) \times g(x)$
iii) On a la relation $f(x) = g(x) + o(g(x))$.
Observons que l'on peut aussi réécrire $iii)$ avec $f(x) = g(x) + o(f(x))$. Cette notion s'emploie naturellement pour les suites -au voisinage exclusif de $+\infty$-
On obtient donc des équivalents de plusieurs façons différentes :

Méthode 1 : On calcule la limite du quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, on attend 1 comme résultat.

Exemple : Si l'on calcule $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$ alors on peut conclure que $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$ (au voisinage de $+\infty$)

Méthode 2 : On décompose une fonction à l'aide de l'autre sous forme de produit.

Exemple : Si l'on montre que $f(x) = \dfrac{e^x}{1+x} g(x)$ pour tout $x \in]-1;1[$, comme on a $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1+x} = 1$, on pourra en déduire que $f(x) \sim g(x)$ au voisinage de 0.

Méthode 3 : On étudie la différence $f(x) - g(x)$: on cherche à montrer qu'il s'agit d'un petit o de l'une des deux.

Exemple : Si $f(x) = x^5 + 1$ et $g(x) = x^5 + (\ln(e+x))^5$, on cherche à savoir si $f(x) - g(x) = 1 - (\ln(e+x))^5$ est un $o(x^5+1) = o(1)$ au voisinage de 0, ce qui est le cas

En particulier, si f et g ont une limite commune $l \in \overline{\mathbb{R}}$ non nulle, alors il suffit de prouver que $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$ pour aboutir à la conclusion $f(x) \sim g(x)$, au voisinage de a. En généralisant, on obtient :

Méthode 4 : On calcule la limite du quotient $\dfrac{f(x) - g(x)}{g(x)}$, on attend 0 comme résultat.

Exemple : Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$ et que l'on vérifie $\lim\limits_{x\to a} f(x) - g(x) = 0$ alors on en déduira que $f \sim g$ au voisinage de a.

Structure

Remarque : Il est à noter que l'on exclut de toutes nos considérations les fonctions nulles au voisinage de a. On ne pourra en particulier pas écrire $0 \sim f(x)$ qui n'aurait d'autre sens que $f \equiv 0$ si l'on devait en analyser le sens.

La relation $\sim$ (au voisinage de a) est une relation d'équivalence (d'où l'emploi du vocable) . Elle est additivement stable pour les fonctions *strictement positives*, conserve produits et quotients et reste “naturellement" compatible avec les petits o :

$$i)\quad f(x) \sim \varphi(x) \text{ et } g(x) \sim \psi(x) \Rightarrow f(x)g(x) \sim \varphi(x)\psi(x) \qquad ii)\quad f(x) \sim \varphi(x) \text{ et } g(x) \sim \psi(x) \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \sim \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

$$iii)\quad f(x) \sim g(x) \text{ et } g(x) = o(\varphi(x)) \Rightarrow f(x) = o(\varphi(x)) \qquad iv)\quad \varphi(x) \sim \psi(x) \Rightarrow o(\varphi(x)) = o(\psi(x))$$

ce qui fournira, en particulier, le passage à la puissance ainsi qu'à l'inverse des équivalents.
Lorsque $f(x) \longrightarrow l$, une constante réelle non nulle, on a clairement $f(x) \sim l$ aussi est-il très souvent plus intéressant de fournir un équivalent de $f(x) - l$. Ce dernier ne sera pas 0 si f non constante (au voisinageet de a) et on montrera ainsi qu'on ne peut pas faire de différences d'équivalents, donc pas de somme non plus en l'absence d'hypothèses solides sur les signes.

Chercher un équivalent

Il faudra alors comprendre que l'équivalent attendu est souvent en rapport avec l'étude effetuée et la pertinence de l'équivalent fourni sera évaluée. Par exemple, si $f(x) \longrightarrow l \neq 0$, inutile de vous contenter de donner $f(x) \sim l$ qui, bien que vrai, ne nous apprendra pas grand chose...
De plus, la nature réflexive de $\sim$ permet toujours d'écrire $f(x) \sim f(x)$ ce qui n'est pas très pertinent...

Exemple : Donner un équivalent à l'infini de $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

Réponse : Le recourt à la quantité conjugée permet d'écrire que $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ et on a alors envie d'écrire directement que $u_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2}n^{-1/2}$. Si l'on vérifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = 1$, on peut éviter de justifier ce passage.

On peut donc rédiger sa solution en *proposant* puis *vérifiant* à l'aide de l'une des quatre méthodes, ou manipuler les opérations sur les $\sim$ (voire, en s'aidant des petits o) pour obtenir un résultat répondant à la question.

Mnémo :

Des équivalents usuels à retenir : (compléter cet espace pour noter vos équivalents préférés en plus)

au voisinage de 0 : $e^x - 1 \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$ $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

au voisinage de $+\infty$: $P(x) \sim a_n x^n$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \sim \dfrac{a_n}{b_k} x^{n-k}$

où $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ et $Q(x) \sum\limits_{k=0}^{m} b_k x^k$ sont deux polynômes de degrés respectifs n et m et $\alpha \in \mathbb{R}^*$ pour lequel on pourra retenir les cas $\alpha = \frac{1}{2}$ et $\alpha = -1$