.

Lois à densité particulières

Exercice $\boxed{1}$ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[1, 2]$. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = 3X - 2$. On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.

1. Calculer $\mathbb{P}\left[\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{4}{3}\right]$.
2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
3. Exprimer $F_Y(t)$ en fonction du réel $t \in [1; 5]$
4. En déduire, pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$. On pourra distinguer trois cas pour y.
5. En déduire la loi de Y. La variable aléatoire Y est-elle à densité ?

Exercice $\boxed{2}$

1. (a) A l'aide d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 2t\,\mathrm{e}^{-5t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déteminer rapidement la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
2. (a) l'aide d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle, déterminer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} 3t^2\,\mathrm{e}^{-2t}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer rapidement la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\,\mathrm{e}^{-3t}\,\mathrm{d}t$.

Exercice $\boxed{3}$ Soient λ un réel strictement positif et f, définie sur $\mathbb{R}$ par : $f = x \mapsto \lambda^2 x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

1. Justifier que la fonction f est une densité.
   Dans les questions suivantes, X est une variable aléatoire de densité f.
2. Montrer que X admet une espérance et la déterminer.
3. La variable aléatoire X admet-elle une variance ? *la valeur éventuelle n'est pas attendue*.
4. Expliciter la fonction de répartition de X.

Exercice $\boxed{4}$ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1.

1. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \dfrac{2}{3}X$. On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.
   (a) Retrouver par le calcul l'expression de $F_X(x)$ pour $x \geq 0$.
   (b) En déduire une expression de $F_Y(t)$ en fonction de $t \geq 0$.
   (c) En déduire, pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$ en distinguant les cas $y < 0$ et $y \geq 0$.
   (d) Retrouver ainsi la loi de Y et donner $\mathbb{E}[Y]$.
   (e) Déterminer les valeurs de $\mathbb{P}[Y \leq 3]$ et $\mathbb{P}_{[Y \geq 1]}[4 < Y]$.
2. On considère la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{1}{2}X - 1$. Le but de cette question est de déterminer la loi de Z. On note F_Z la fonction de répartition de Z.
   (a) Justifier que, pour tout réel z, on a : $F_Z(z) = F_X(2z + 2)$.
   (b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité et préciser une densité de Z.
   (c) Calculer les valeurs de $\mathbb{E}[Z]$ ainsi que $\mathbb{V}[Z]$ après en avoir justifié les existences respectives.

Exercice $\boxed{5}$ **•$\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ caractérisation de la durée de vie sans vieillissement**

Soit X une variable aléatoire réelle positive($X(\Omega) = \mathbb{R}_+$), à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$. On notera F_X sa fonction de répartition [1] et densité f_X une densité continue sur $\mathbb{R}_+$ de X.

1. On la supposera ici de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$

On rappelle que l'on dit que la loi de X est *sans mémoire* lorsque :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+ \forall h > 0 \quad \mathbb{P}_{[X>h]}[X > x+h] = \mathbb{P}[X > x]$$

On a déjà vu que, si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$, alors X est sans mémoire. On va chercher à établir la réciproque dans le cas de X à densité.

1. Démontrer que : $\forall t \geq 0 \forall h \geq 0 \quad F_X(t+h) = F_X(t) + F_X(h) - F_X(h)F_X(t)$
2. En déduire que $\forall t \geq 0 \quad f_X(t) = -f_X(0)(F_X(t) - 1)$
3. On considère, pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, une équation (E_a) : $Y' = -aY$ d'inconnue Y définie sur $\mathbb{R}_+$, fonction de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$. Démontrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, les solutions de cette équation forment un espace-vectoriel noté $\mathcal{E}_a$.
4. Justifier que la fonction $G = F_X - 1$ est un élément de $\mathcal{E}_a$ pour un certain a que l'on précisera et qu'elle vérifie $G(0) = -1$.
5. Vérifier que, pour $a \in \mathbb{R}$ quelconque, toute $Y \in \mathcal{E}_a^*$ vérifie $\forall t \geq 0 \quad \ln|Y(t)| = -at + C^{te}$
6. Conclure (si vous n'êtes pas sans mémoire)

Applications concrètes

Exercice $\boxed{6}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ Un vendeur propose un appareil électronique[2] dont il vous assure que son espérance de vie est de 10 ans. Le client préfère savoir à partir de quelle durée d (au mois près) la probabilité de voir l'appareil cesser de fonctionner tombe en-dessous de $\frac{1}{2}$.

Déterminer d puis généraliser à N années d'espérance de vie.

Exercice $\boxed{7}$ $\bullet\Theta^{\mathbf{C}\sharp}$ On met en vente un appareil dont la durée de fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Le prix de vente aux particuliers est de 250 euros. Une étude montre que l'espérance de vie de cet appareil est de 6 ans. Le service client propose une garantie initiale de 3 ans pour cet appareil (avec remboursement intégral) et une extension de garantie au prix de 25 euros pour deux années supplémentaires.

Est-il intéressant(pour le client) de payer cette extension de garantie ? Argumenter.

Exercice $\boxed{8}$ Valeurs Connues

On rappelle que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0;1)$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[-1 \leq X \leq 1] &= v_1 \approx 0,683 \\
\mathbb{P}[-2 \leq X \leq 2] &= v_2 \approx 0,954 \\
\mathbb{P}[-3 \leq X \leq 3] &= v_3 \approx 0,997
\end{aligned}$$

1. Démontrer que si Y suit une loi $\mathcal{N}(\mu;\sigma^2)$, avec $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ donnés, on a :

$$\forall k \in \{1;2;3\} \ \mathbb{P}[\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma] = v_k$$

2. Etablir, de façon similaire, que si l'on note v_k la valeur $\mathbb{P}[-k \leq X \leq k]$, alors on a bien encore

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \mathbb{P}[\mu - k\sigma \leq Y \leq \mu + k\sigma] = v_k$$

3. Etablir que, pour tout $\alpha \in]0;1[$, il existe un unique réel u_α vérifiant :

$$\mathbb{P}[\mu - u_\alpha\sigma \leq Y \leq \mu + u_\alpha\sigma] = 1 - \alpha$$

puis donner une valeur approchée de $u_{0,05}$.

2. on admettra qu'il ne vieillit pas

Exercice $\boxed{9}$ *D'après EML 2006*

On considère une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée mais de variance $\frac{1}{2}$.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice $\boxed{10}$ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x e^{-x^2/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et tracer l'allure de son graphe.
   On notera X une variable aléatoire admettant f pour densité dans la suite.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X associée à X.
3. Démontrer que X admet une espérance et la déterminer.
4. Déterminer la loi de $Y = X^2$

Exercice $\boxed{11}$ On définit la fonction Erf sur $\mathbb{R}$ par :

$$Erf : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,dt$$

On rappellera, à toute fin utile, que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 1$

1. Vérifier que la fonction Erf est bien définie sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de Erf.
3. Dresser le tableau des variations complet de Erf sur $\mathbb{R}$.
4. Etudier la convexité de Erf.
5. Déterminer $Erf^{(n)}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
6. Justifier que Erf admet une fonction réciproque notée Fer puis procéder à son étude.
   On s'intéressera également à la dérivée de Fer.

Exercice $\boxed{12}$ *D'après Oral-HEC voie E*

Soient k et λ deux réels. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = kte^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

1. Déterminer k en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.
   X désignera dans la suite une variable aléatoire de densité f.
2. Justifier que X admet une espérance et la calculer.
3. Déterminer une densité de $Y = aX + b$ en fonction de a et de b.
4. Démontrer que X admet des moments d'ordre n que l'on calculera (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice $\boxed{13}$ *D'après HEC 2010*

On considère une variable aléatoire T à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ dont la fonction de répartition vérifie :

$$F_T(t) = \left(1 - e^{-\lambda t}\right)^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \quad (\lambda > 0 \text{ constante})$$

Démontrer que T admet une espérance de $\dfrac{3}{2\lambda}$ et une variance de $\dfrac{5}{4\lambda^2}$

Exercice $\boxed{14}$ *D'après EML 2006*

On considère une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée mais de variance $\frac{1}{2}$.

Démontrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2}\,dx$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice $\boxed{15}$ *D'après HEC-Oral voie S*

On considère une variable aléatoire X suivant la loi normale centrée réduite. On désignera par f la densité définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$ ainsi que par Φ la fonction de répartition associée à X.

1. Démontrer que, pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^r f(x)dx$ converge. On notera m_r sa valeur.
2. Etablir que si r est un entier impair, alors m_r est nul.
3. Démontrer que si $r = 2p$, pour un certain $p \in \mathbb{N}$, alors $m_r = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.
4. Etablir la convergence, pour tout $a > 0$, de l'intégrale notée F_a définie par :

$$F_a = \int_0^{+\infty} x f(x) \Phi(ax) dx$$

5. Soit $a > 0$ fixé. On pose $g(x) = 2f(x)\Phi(ax)$ pour $x \in \mathbb{R}$
   (a) Vérifier que g peut être considérée comme une densité de probabilité d'une variable aléatoire Y.
   (b) Démontrer que Y admet un moment quadratique et déterminer $\mathbb{E}[Y^2]$ ainsi que $\mathbb{V}[Y]$.

Exercice $\boxed{16}$ Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. On note Φ sa fonction de répartition.

1. Montrer que, pour tout réel $a > 1$ et tout réel $x > 0$ on l'encadrement :

$$0 \leq x(1 - \Phi(ax)) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-ax^2/2}$$

2. En déduire que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} a \int_0^{+\infty} x(1 - \Phi(ax))\, dx = 0$

Exercice $\boxed{17}$ **Lambert fait sa Loi**

On définit la fonction w sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad w(x) = \frac{x}{a} e^{a-x} \mathbb{1}_{[a;+\infty[}(x)$$

où a est un paramètre réel strictement positif fixé et que l'on cherchera à identifier dans des contextes différents durant l'exercice.

1. On pose $f(x) = xe^{-x}$ Dresser le tableau complet des variations de f sur $\mathbb{R}$ et en déduire que f admet une bijection réciproque sur $[1; +\infty[$.
   <u>NB</u> : La fonction réciproque de f sur $[1; +\infty[$ s'apelle fonction de Lambert.
2. Etablir que w induit une densité de probabilité notée h sur $\mathbb{R}_+$.
3. On définit $L_a = \mathbb{1}_{[a;+\infty[} - w$. Démontrer que, pour tout $a \geq 1$ on a que L_a est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. On nommera la loi associée *loi de Lambert* de paramètre a et on la notera $\mathcal{L}_a$.
4. Justifier que la fonction L_a admet une réciproque L_a^{-1} sur $[a; +\infty[$ pour $a \geq 1$.
5. On se donne U une VAR à densité de loi uniforme sur $]0; 1[$. Démontrer que $Y = L_a^{-1}(U)$ suit une loi de Lambert de paramètre a.