.

Optimisation avec ou sans contraintes

Eléments de théorie générale

Exercice $\boxed{1}$ $\boxed{\textbf{RàR}}$

1. Soit S une matrice symétrique d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients réels.
   Démontrer que si l'on peut trouver $r > 0$ tel que $h \in \mathcal{B}(O_n; r) \Rightarrow {}^t hSh \geq 0$ alors on a :
   $$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad {}^t xSx \geq 0$$
2. Soit f une fonction définie, de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$, à valeurs réelles.
   (a) Redonner le développement de Taylor à l'ordre 2 de f au voisinage de $x_0 \in \mathcal{U}$
   (b) On suppose que f admet un minimum local en x_0 de $\mathcal{U}$.
   Justifier que $\forall h \in \mathbb{R}^n \quad {}^t h \cdot \nabla^2(f)(x_0) \cdot h \geq 0$ et en déduire que la matrice hessienne de f en x_0 est symétrique, diagonalisable à valeurs propres positives.
   (c) Etablir un résultat analogue lorsque f réalise un maximum local en $x_0 \in \mathcal{U}$.

Exercice $\boxed{2}$ $\boxed{\textbf{RàR}}$ On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un point $x_0 \in \mathcal{U}$ supposé critique pour f.
Par souci de simplicité et de clarté, nous noterons abusivement ∇^2 la matricienne de f en x_0.

1. On suppose ici que ∇^2 est définie positive, à valeurs propres strictement positives.
   (a) Justifier que, pour un certain $r > 0$, on a que :
   $$\forall h \in \mathcal{B}(O_n; r) \quad f(x_0 + h) - f(x_0) \geq 0$$
   avec égalité seulement si $h = O_n$.
   (b) En déduire que f réalise un minimum local en x_0.
2. Etablir un résultat analogue lorsque ∇^2 est définie négative, à valeurs propres strictement négatives.
3. Expliciter ces résultats dans le cas où $n = 2$ et obtenir un critère portant sur r, s et t lorsque l'on écrit :
   $$\nabla^2(f)(x_0) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$
4. *Application :* On donne $f(x; y) = x^4 + y^4 - 4x^2 + 8xy - 4y^2$. Déterminer les points critiques de f puis optimiser (sans contrainte) la fonction f.

Optimisation sous contraintes - liaisons explicites

Exercice $\boxed{3}$ Optimiser $f(x; y) = xy - 2x + 1$ sous la contrainte $x - y + 6 = 0$.
Quelle est la nature (topologique) de la contrainte ?

Exercice $\boxed{4}$ Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x; y) = xe^y + ye^x$.
On pose $H : x - y = 0$. Déterminer la nature (topologiqueà de H) puis optimiser f sous contrainte H.

Exercice $\boxed{5}$ On pose $f(x; y) = x^2 - y^4 - y^2 + 2xy$, définie sur $\mathbb{R}^2$ muni de la contrainte $x + y^2 = 0$.
On pourra procéder par substitution.

.

Exercice $\boxed{6}$ On pose $f(x;y;z) = ze^{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^3$ muni de la contrainte $1 = x^2 - y - z$.
On définit $E = \{(x;y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y - z - 1 = 0\}$

1. Déterminer la nature topologique de E (fermé, ouvert, borne ?).
2. Soit $(x;y;z) \in E$. Donner une expression de f ne dépendant que de y et z.
3. On définit $h : (u;v) \mapsto \sqrt{u+v+1}$
   (a) Décrire le domaine de définition $D \subset \mathbb{R}^2$ de h et en donner la nature (topologique).
   (b) Démontrer que h n'admet pas de maximum sur D.
   (c) Déterminer le gradient de h puis sa matrice Hessienne en un point $(u;v) \in D$
   (d) h admet-elle des points critiques sur D ? Justifier.
   (e) Démontrer que h admet un minimum global de 0 sur D.
4. Justifier que résoudre le problème d'optimisation de f sous contrainte $1 = x^2 - y - z$ revient à minimiser $ze^{1+z+y+y^2}$ sur D.
5. En déduire la solution au problème.

Optimisation sous contraintes -démarche guidée

Exercice $\boxed{7}$ **D'après EnsD2 - 2016**
Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x;y) = x^3 + y^3$. On souhaite déterminer les extrema de f sur le domaine D défini par :

$$D = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$

1. Déterminer la nature topologique de D.
2. Posez le Lagrangien $L(x;y;\mu)$ du programme où μ désigne un pultiplicateur de Lagrange.
3. Posez la condition de qualification du problème.
4. Déterminez le gradient du Lagrangien.
5. Quels sont les points critiques associés à $\mu = \dfrac{3}{2}$? à $\mu = -\dfrac{3}{2}$
6. Déterminez les deux autres points critiques.
7. Déterminez la Hessienne bordée.
8. Montrez que le programme admet trois minima locaux, ainsi que trois maxima locaux.

Exercice $\boxed{8}$ **D'après EnsD2 - 2014**
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x;y) = x^2 + y^2$.
On en cherche le minimum sous la contrainte $C : 4x^2 - y^2 - 16 = 0$

1. On considère l'ensemble $C = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 - y^2 - 16 = 0\}$ assimilé à la contrainte. Justifier que C est fermé et borné dans $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que f admet bien un minimum sur C (on ne cherche pas encore à le déterminer)
3. Exprimer le Lagrangien $L(;x;y;\lambda)$ du problème
4. Déterminer les points critiques éventuels associés
5. Les points critiques permettent-ils d'identifier des minima locaux ? Justifier.

Exercice $\boxed{9}$ **D'après EnsD2 - 2017**
On s'intéresse à l'ensemble des $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^6 + y^6 = 1$. On souhaite en déterminer le(s) point(s) le(s) plus proche(s) de l'origine au sens de la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$.
Ce problème peut être modélisé comme la minimisation sous contrainte d'une fonction f définie de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.

1. Quelle est l'expression de $f(x;y)$ en fonction de x et de y ?
2. Posez le Lagrangien $L(x;y;\lambda)$ du programme, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Lagrange.
3. Déterminez le gradient du Lagrangien.
4. Montrez qu'il existe deux valeurs du multiplicateur vérifiant les conditions du premier ordre.
   On les notera λ_1 et λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
5. Déterminez les points critiques associés au multiplicateur λ_1, puis au multiplicateur λ_2.
6. Montrer que f prend une même valeur V_1 aux points critiques associés à λ_1.
7. Montrer que f prend une même valeur V_2 aux points critiques associés à λ_2.
8. En déduire le ou les minima recherchés, s'il existent.

Optimisation sous contraintes -contraintes plus générales

Exercice $\boxed{10}$ Dans chaque cas, résoudre le problème d'optimisation proposé :

1. Optimiser f définie par $f(x;y) = x^2y$ sous la contrainte $(x;y) \in \partial\mathcal{B}(O;3) = \mathcal{C}(O;3)$
2. Optimiser $f(x;y;z) = x^2 + y^2 + z$ sous la contrainte $x - 2y^2 + z = 0$
3. Optimiser f définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(X) = ||X||_2^2$ sous les contraintes $x^2 + y^2 + 2z = 6$ et $x - y - z = 0$.
4. Optimiser $f(x;y) = \dfrac{x+y}{xy}$ sous la contrainte $\ln x + \ln y = -2$.
   On précisera au préalable le domaine $\mathcal{D}$ de définition de f, ainsi que sa nature topologique.

Exercice $\boxed{11}$ **D'après EnsD2 - 2019**

1. Soit $C_2 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\}$.
   (a) Dessiner C_2 dans le plan $\mathbb{R}^2$. Quelle est sa nature topologique ? (ouvert, fermé, borné ?)
   (b) Montrer que si $(x;y) \in C_2$ alors $1 - 2\sqrt{xy} \geq 0$
   (c) En déduire que, pour tout $(x;y) \in \mathbb{R}^2$ avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$ on a $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$.

   On cherche à étendre l'inégalité précédante à $\mathbb{R}_+^3$
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x;y;z) = xyz$.
   On veut maximiser f sous contrainte C_3 où l'on définit :
   $$C_3 = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 1\ ,\ x \geq 0\ ,\ y \geq 0\ ,\ z \geq 0\}$$
   (a) Justifier que f admet bien un maximum sur C_3 (on ne cherche pas encore à le déterminer)
   (b) Pourquoi le maximum de f (sous contrainte C_3) est-il atteint seulement si $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $z \neq 0$?
   (c) Ecrire le Lagrangien $L(x;y;z;\lambda)$ associé au problème sous contrainte où $\lambda \in \mathbb{R}$ est un multiplicateur de Lagrange.
   (d) Calculer le gradient de L
   (e) Déterminer les conditions de premier ordre.
   (f) Etablir que le maximum de f sous contrainte C_3 est atteint pour $x = y = z$
   (g) Quelle est la valeur de ce maximum ?
   (h) Démontrer enfin que, pour tous réels positifs x, y et z on a bien :
   $$\sqrt[3]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{3}$$