.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice I : Deux cas c'est pas $2k$ ni 2 c'est k

On considère un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension 3 muni de la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et f l'application linéaire de E dans E associée à la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -\frac{7}{2} & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Donner $f(e_1)$, $f(e_2)$ et $f(e_3)$
2. Déterminer le rang de f. L'application est-elle bijective ?
3. En déduire dim(Ker(f)), la dimension du noyau de f.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$ avec $k \geq 2$.
   (a) Calculer $Mat_{\mathcal{B}}(f^k)$, la matrice associée à f^k dans la base $\mathcal{B}$ [1]
   (b) Déterminer le rang de f^k et en déduire dim(Ker(f^k)) (*indication :* distinguer deux cas pour l'entier $k \geq 2$).
   les indications n'étaient pas présentes dans le sujet original
5. Soit $v \notin \text{Ker} f^2$. On définit $\mathcal{C} = (f^2(v)\ ,\ -f(v)\ ,\ v)$
   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de E.
   (b) Ecrire $M' = Mat_{\mathcal{C}}(f)$, la matrice associée à f dans la base $\mathcal{C}$.
   (c) Vérifier que $e_3 \notin \text{Ker}(f^2)$.
   (d) On désigne par P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{C}$. Déterminer P et P^{-1} lorsque $v = e_3$.
   (e) Vérifier que $M' = P^{-1}MP$.
6. On pose $N = M + I$ où I désigne la matrice identité.
   (a) Calculer N^n en fonction de M pour $n \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire l'expression de N^n.
7. *Application :*
   Soient $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites réelles définies par récurrence par $p_0 = r_0 = 0$ et $q_0 = 1$, satisfaisant les relations :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad p_n = 2q_{n-1}\ ;\ q_n = p_{n-1} - r_{n-1}\ ;\ r_n = -\frac{7}{2}p_{n-1} + 5q_{n-1} + 3r_{n-1}$$
   (a) En posant $X_n = \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \\ r_n \end{pmatrix}$ pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer la relation de récurrence proposée sous forme matricielle puis montrer que $X_n = N^n X_0$
   (b) Déterminer enfin les expressions respectives de p_n, q_n et r_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   remarque finale :La matrice et les suites ont été complètement changées par rapport au sujet d'origine donc n'en cherchez pas la correction.

1. *(dinstinguer deux cas $(ah)^2$)*

Exercice II : Eux aiment Hélène (d'après EML 20/20)

On pose f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(1-x)}{\ln(x)}$ et on définit F sur $\Omega =]0;+\infty[^2 \subset \mathbb{R}^2$ par :

$$\forall x > 0 \ \forall y > 0 \quad F(x;y) = x^2 y + x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 2x$$

Partie A : Première dimension

1. Etablir que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$.
2. Vérifier que, pour tout $x \in]0;1[$ on a :

$$f'(x) = \frac{-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)}{x(1-x)(\ln x)^2}$$

3. Démontrer que f est strictement croissante sur $]0;1[$
4. Déterminer les limites de f en 0 et en 1.
5. Vérifier que la fonction $\tilde{f}$ définie sur $[0;1[$ par :

$$\forall x \in [0;1[\quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

   est continue sur $[0;1[$. On pourra confondre $\tilde{f}$ et f dans la suite.
6. Démontrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$. (on a confondu $\tilde{f}$ et f)
7. On considère maintenant l'équation (E_n) : $x^n + x - 1 = 0$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, d'inconnue réelle $x \in \mathbb{R}_+$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation (E_n) admet une solution u_n unique dans $\mathbb{R}_+$ (ici $n \neq 0$)
   (b) Justifier que le réel u_n ainsi défini est dans $]0;1[$. On donnera u_1 et u_2. On posera ensuite $u_0 = 0$.
   (c) Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(u_n) = n$ et en déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Partie B : Seconde dimension

1. Justifier que $\Omega =]0;+\infty[^2$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω.
2. Etablir que F admet un gradient $\nabla F(x;y)$ en tout point $(x;y) \in \Omega$ puis déterminer, en fonction de $x > 0$ et de $y > 0$ les dérivées partielles d'ordre 1 de F.
3. On rappelle que u_3 est l'unique solution de $\mathbb{R}_+$ de (E_3) : $x^3 + x - 1 = 0$ et que $u_3 \in]0;1[$
   (a) Vérifier que F admet $C = (u_3; {u_3}^2)$ comme unique point critique.
   (b) Ecrire la matrice Hessienne $\nabla^2 F(C)$ en le point critique C. On notera H plus simplement cette matrice.
   (c) Démontrer que H admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 vérifiant : $\lambda_1\lambda_2 = -6{u_3}^2 - 2$
4. La fonction F admet-elle des extrema locaux sur Ω ? des extrema globaux sur Ω ? Justifier.

Exercice III : Une expo dans (la) cité !

Pour $m > 0$ réel donné, on considère la fonction F_m définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad F_m(t) = \begin{cases} 1 - e^{-mt} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Démontrer que, pour tout $m > 0$, la fonction F_m est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   On pourra dire, abusivement, dans la suite que F_m est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Etablir que F_m réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $[0;1[$ pour tout $m > 0$. On notera F_m^{-1} sa bijection réciproque.

3. On définit une nouvelle fonction f_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad f_m(t) = \begin{cases} me^{-mt} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   (a) Justifier que f_m ainsi définie vérifie la relation : $\forall\, t \in \mathbb{R}^* \quad F'_m(t) = f_m(t)$

   (b) Etablir que, pour tout $m > 0$ on a $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_m(t)\, \mathrm{d}t$ est convergente et en calculer sa valeur.

   (c) Etablir que f_m une densité de probabilités pour tout $m > 0$.

   (d) Justifier que l'application $t \mapsto tf_m(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en déduire que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf_m(t)\, \mathrm{d}t$ converge.
   On notera E_m la valeur de cette dernière intégrale dans la suite du problème.

4. Vérifier que, pour tout $m > 0$ on a $1 - F_m(E_m) = \dfrac{1}{e}$.

5. On pose à présent φ_m, application définie sur $[0; 1[$ par $\varphi_m(x) = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_m^{-1}(x)$.

   (a) Calculer explicitement, en fonction de $m > 0$ et de $m \in [0; 1[$, la valeur de $\displaystyle\int_0^x \varphi_m(t)\mathrm{d}t$.

   (b) En déduire que $\displaystyle\int_0^x \varphi_m(t)\mathrm{d}t$ diverge

Exercice IV : Quand votre relation prend la bonne direction

On considère l'ensemble E des parties de $\mathbb{R}^n$ où $n \in \mathbb{N}$ est au moins 2. Ainsi $A \in E$ signifie $A \subset \mathbb{R}^n$.
On définit sur E une relation binaire $\sim$ au moyen de :

$$A \sim B \quad \text{si, et seulement si} \quad \exists x \in \mathbb{R}^n \;\; \forall y \in \mathbb{R}^n \;\; y \in A \;\Leftrightarrow\; y + x \in B$$

Partie I : On peut vraiment dire ection ?

1. Etablir que la relation binaire $\sim$ est une relation d'équivalence sur $E = \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$
2. Déterminer la classe d'équivalence de $\mathbb{R}^n$ pour $\sim$ (l'ensemble des parties X de $\mathbb{R}^n$ telles que $X \sim \mathbb{R}^n$).
3. Soit $A \in E$ un ensemble fini. Justifier que, si $B \in E$ est tel que $A \sim B$ alors B est fini de même cardinal que A.
   Réciproquement, a-t-on que si B est fini de même cardinal que A, alors $A \sim B$?
4. Dans cette question seulement on considère que $n = 2$.
   (a) Soit $u = (1; 1) \in \mathbb{R}^2$ non nul et $D = vect(u)$. Représenter graphiquement D dans un repère orthonormé.
   (b) On pose $D' = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - 2y = 3\}$. Compléter votre graphique avec une représentation de D'.
   Etablir que $D \sim D'$.
   (c) Soient f et g deux applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. De façon générale, on désignera par $\mathcal{C}_\varphi$ la courbe représentative dans le plan rapporté à un repère, de toute application $\varphi \in \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et assimilée à :

$$\mathcal{C}_\varphi = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi(x)\}$$

   Etablir que $(f - g)' = \odot$ (fonction nulle) $\Rightarrow \;\; \mathcal{C}_f \sim \mathcal{C}_g$
   (d) La propriété précédante admet-elle une réciproque ?
   (e) Etablir que, si D est de la forme $\Delta = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + p\}$ où $(m; p) \in \mathbb{R}^2$ vérifie $(m; p) \neq (0; 0)$ alors on a :

$$\forall \Delta' \in E \qquad \Delta \sim \Delta' \quad \Longleftrightarrow \quad \exists b \in \mathbb{R} \; \Delta' = \{(x; y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = mx + b\}$$

   Quelle propriété géométrique usuelle retrouve-t-on entre Δ et Δ' ?

(f) On pose $V = vect(0;1)$. Démontrer que la classe d'équivalence de V est formée de tous les ensemble $V' \subset \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\exists c \in \mathbb{R} \quad V' = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = c \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$$

Quelle propriété géométrique usuelle retrouve-t-on entre V et V' ?

5. On se place de nouveau dans le cas général où $n \geq 2$
   (a) Soient F_1 et F_2 deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Démontrer que $F_1 \sim F_2 \Leftrightarrow F_1 = F_2$
   (b) Soit $F = vect(u)$ où $u \in \mathbb{R}^n$ est non nul. Décrire la classe d'équivalence notée $\overline{F}$ selon $\sim$.

On appelle direction toute classe d'équivalence obtenue de la sorte : aussi, si $u \in \mathbb{R}^n$, la direction de u est $\overline{F}$ où $F = vect(u)$.

Partie II : Ens rectangulaires (d'après Ens 2010)

On appelle *ensemble rectangulaire* tout ensemble $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ vérifiant :

$$\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2 \;\; \forall (x';y') \in \mathbb{R}^2 \quad [(x;y) \in \mathcal{R} \text{ et } (x';y') \in \mathcal{R}] \implies [(x;y') \in \mathcal{R} \text{ et } (x';y) \in \mathcal{R}]$$

1. Vérifier $A = \{(-2;-1)\ ;\ (-2;1)\ ;\ (2;-1)\ ;\ (2;1)\}$ est rectangulaire.
2. Vérifier $R_0 = \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max(|x|;|2y|) \leq 2\}$ est rectangulaire et que $A \subset R_0$.
3. Représenter A et R_0 dans un repère adapté.
4. Soit $\mathcal{R}$ un ensemble non vide de $\mathbb{R}^2$.
   (a) Démontrer que, si $\mathcal{R}$ est rectangulaire, alors il existe alors $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ non vides tels que $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
   (b) Réciproquement, établir que si $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}$ non vides tels que $\mathcal{R} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ alors $\mathcal{R}$ est rectangulaire.
5. Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^2$ ensemble rectangulaire non vide quelconque de $\mathbb{R}^2$.
   On définit sur $\mathcal{R}$ une relation binaire $\prec$ par

$$\forall (x;y) \in \mathcal{R} \;\; \forall (x';y') \in \mathcal{R} \quad [(x;y) \;\prec\; (x';y')] \iff [x \leq x' \text{ et } y \leq y']$$

   (a) Etablir que $\prec$ définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathcal{R}$.
   (b) La relation d'ordre ainsi définie, est-elle, en toute généralité, totale ?
   (c) On considère $\mathcal{R} = R_0$. Démontrer que, dans ce cas particulier, R_0 possède un élément minimum et un élément maximum pou la relation $\prec$. On les identifiera formellement et graphiquement.
6. On appelle *point-selle gauche* d'une fonction f définie sur $\mathcal{R} = A \times B \subset \mathbb{R}^2$ tout point $(s;t) \in \mathcal{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in A \; \forall y \in B \quad f(x;t) \leq f(s;t) \;\text{ et }\; f(s;y) \geq f(s;t)$$

   Démontrer que l'ensemble des points-selles gauches de f est aussi rectangulaire.