.

Intégrales Généralisées : corrigés

Exercice $\boxed{12}$ **Intégrale de Gauss** Le lecteur détaillera les éléments de rédaction usuels. Il s'agit avant tout de fournir les articulations essentielles permettant d'aboutir au résultat de calcul fondant la loi normale centrée-réduite.

1. le calcul donne $f(0) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$.
2. Pour $x \geq 0$, on utilisant l'énoncé :

$$f'(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^1 -e^{-(1+t^2)x}\mathrm{d}t = -e^{-x}\int_0^1 e^{-xt^2}\mathrm{d}t$$

   On précisera alors que $f'(0) = -1$.
3. (a) On a $g(0) = f(0) = \dfrac{\pi}{4}$
   (b) Nous vérifions par calcul, avec $x > 0$:

$$g'(x) = 2xf'(x^2) = -2xe^{-x^2}\int_0^1 e^{-x^2t^2}\mathrm{d}t = -2xe^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}\frac{\mathrm{d}u}{x}$$

   et par changement de variables (linéaire) $u = xt$, le résultat s'en suit. On le cas $x = 0$ est traité à part et ne pose aucune difficulté.
4. (a) On calcule de façon spécifique : $h(0) = g(0) + 0^2 = \frac{\pi}{4}$.
   (b) On a $h'(x) = g'(x) + 2\left(e^{-x^2}\,dt\right)\left(\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)$ par dérivée de somme, composée et théorème fondamental de l'intégration. Le résultat suit par la question précédante : $h'(x) = g'(x) - g'(x) = 0$ et ce pour tout $x \geq 0$.
   Ainsi h est constante et on trouve, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $h(x) = h(0)\frac{\pi}{4}$.
5. Pour $x \geq 0$, si $t \in [0;1]$ alors, par comparaisons successives et comme $0 < \dfrac{1}{1+t^2} \leq 1$ on a $0 < \dfrac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} \leq e^{-x}$ de limite nulle lorsque x tend vers $+\infty$. Par théorème de comparaison, on trouve donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Par limites composées et avec $g(x) = f(x^2)$ on obtient $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   Enfin, comme $e^{-xt^2} \leq 1$ pour $x \geq 0$ et $t \in [0;1]$, on peut écrire (croissance de l'intégrale) que $|f'(x)| \leq e^{-x}$ et conclure, par théorème d'encadrement, que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$.
6. Comme h est constante, on a aisément que : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = h(0)$. Nous venons de voir que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$. Ainsi, par la définition de h :

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) - g(x) = \lim_{x\to+\infty} h(x) \;-\; \lim_{x\to+\infty} g(x) = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \quad\Longrightarrow\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

   On a alors $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et finalement I converge bien avec $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.
7. Nous démontrons en cours que φ est continue, positive sur $\mathbb{R}$ (sans difficulté) et nous venons de voir que I converge et vaut $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$. Un chagement de variable $u = t\sqrt{2}$ dans $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$ produit :

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty}\int_0^{x\sqrt{2}} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

   d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$ et ainsi, par parité de φ, et linéarité de l'intégrale, on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u = 2\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2\pi} \quad\Longrightarrow\quad \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(u)\,\mathrm{d}u = 1$$

Exercice $\boxed{14}$ 1. On peut réécrire :

$$\forall x \geq 2 \quad F(x) = 1 - \frac{9}{x^2+5}$$

ce qui permet d'observer que F est croissante sur $[2;+\infty[$ (dérivation ou variations composées) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{9}{x^2+5} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. L'étude sur $]-\infty;2[$ est évidente : F y est nulle.

Il reste à étudier la continuité en $x=2$: $\lim\limits_{x\to 2^+} F(x) = \dfrac{4-4}{4+5} = 0$ et ainsi F est continue en $x=2$. La continuité sur $]2;+\infty[$ est claire par composition.
Enfin, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $x=2$, ce qui suffit à conclure que X est à densité.

Notons alors f_X une densité de X. On choisit $f_X(x) = 0$ pour $x < 2$ puisque F est nulle sur $]-\infty;2[$ et on calcule :

$$\forall x > 2 \quad F'_X(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} = f_X(x)$$

et on peut choisir la valeur de $f_X(2)$: on prend 0. En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2}\mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)$$

convient commme densité de F.

2. On étudie la quantité $xf_X(x)$ positive (ou nulle) sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x > 2 \quad xf_X(x) = \frac{18x^2}{(x^2+5)^2} \equiv \frac{18}{x^2} \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

et ainsi, par positivité critère d'équivalence, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument) et comme $xf_X(x) = 0$ pour $x \leq 2$ on a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument) permettabt de conclure que X admet une espérance.

3. Les calculs montrent que G n'est pas continue en $x=2$ comme $G(2) = \frac{1}{2}$ mais $G(x) = 0$ pour tout $x < 2$. Donc G n'est pas la fonction de répartition d'une VAR à densité.