.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Problème I

Soient a, b, ε trois réels strictement positifs et on note $\Omega = \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. On définit la fonction $J : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

$$J(x;y) = ax + by + \varepsilon h(x) + \varepsilon h(y)$$

avec $h(t) = t\ln t - \ t$ pour tout $t > 0$.

Partie A

1. Démontrer que f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = ax + \varepsilon h(x)$ est strictement convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Dresser le tableau des variations de la fonction f. Préciser les limites de f en 0 et en $+\infty$.
3. Tracer le graphe de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Démontrer que f réalise un minimum global sur $\mathbb{R}_+^*$ en un unique $x_0 > 0$.

Partie B

1. Démontrer que J est strictement convexe sur Ω puis déterminer le minimum de J sur Ω.
2. On définit à présent le problème d'optimisation sous contrainte :

$$\mathcal{P} : \left| \begin{array}{l} \min_{(x;y)\in\Omega} J(x;y) \\ \text{s.c.} \quad x + y = 1 \end{array} \right.$$

et on écrira le lagrangien de ce problème $\mathcal{P}$ comme :

$$\mathcal{L} : (x;y;\lambda) \in \Omega \times \mathbb{R} \ \mapsto \ J(x;y) - \lambda(x + y - 1)$$

(a) Ecrire les équations de premier ordre associées au lagrangien
(b) On note $(x_\varepsilon^* \ ; \ y_\varepsilon^*)$ une éventuelle solution du problème $\mathcal{P}$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$x_\varepsilon^* = e^{(\lambda - a)/\varepsilon} \quad \text{et} \quad y_\varepsilon^* = e^{(\lambda - b)/\varepsilon}$$

(c) Expliciter λ et en déduire $(x_\varepsilon^*; y_\varepsilon^*)$ en fonction de a, b et ε
(d) Démontrer que $(x_\varepsilon^* \ ; \ y_\varepsilon^*)$ proposé est bien solution du problème $\mathcal{P}$.
(e) On suppose ici $a \geq b$. Déterminer $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(x_\varepsilon^*; y_\varepsilon^*) = \left(\lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon^*; \lim\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon^*\right)$.
(f) Que vaut $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}(x_\varepsilon^*; y_\varepsilon^*)$ dans le cas où $b > a$?

[D'après Ens-D2 Paris Saclay 2022]

Problème II

On note $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ et si $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$, on rappelle que la puissance n-ième d'un endomorphisme est définie comme *la composée n-ième de cet endomorphisme avec lui-même* (et $n \in \mathbb{N}$ et convention $f^0 = id_{\mathbb{R}^3}$)

On dira qu'un endomorphisme est *nilpotent* s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^p = 0_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)}$. On définit alors *l'indice de nilpotence* p^* de f par :

$$p^* = \min\{p \in \mathbb{N}^* \mid f^p = 0\}$$

De même, une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que M^p soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on définira de façon similaire l'indice de nilpotence d'une telle matrice.

Enfin, on notera N_1 et N_2 les deux matrices définies comme :

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont des matrices nilpotentes et préciser leur indice de nilpotence.
2. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ nilpotent d'indice de nilpotence p^*.
   (a) Démontrer qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que $f^{p-1}(x_0) \neq 0$
   On considérera x_0 dans la suite qui vérifie cette condition
   (b) Justifier que la famille $(x_0; f(x_0); \ldots; f^{p-1}(x_0))$ est libre dans $\mathbb{R}^3$
   (c) En déduire que $p \leq 3$

   On considère à présent f nilpotent vérifiant dim Ker$f = 1$
3. Le but de cette question est d'établir que $p^* = 3$ par l'absurde.
   (a) Identifier f si l'on avait $p^* = 1$?
   (b) Etablir que $p^* = 2 \implies Im(f) \subset \text{Ker}(f)$
   (c) En déduire que $p^* \neq 2$
   (d) Conclure.
4. Décrire la matrice de f relativement à la base $(x_0; f(x_0); f^2(x_0))$.
5. En déduire que N_2 est la matrice représentative de f dans une base que l'on identifiera.
   Remarque : Cette base n'est pas unique et on ne cherchera pas à les caractériser toutes
6. Démontrer que N_1 représente un endomorphisme nilpotent d'indice de nilpotence $p^* = 2$ dans une base que l'on identifiera.

[D'après Ens-D2 Paris Saclay 2022]

Problème III

Partie A

Soit $(a; b) \in]0; 1[^2$ vérifiant $a + b < 1$ et X une variable aléatoire discrète dont la loi est donnée par :

$x =$	-1	0	$+1$
$\mathbb{P}[X = x]$	a	$1 - (a + b)$	b

1. Calculez l'espérance de X
2. On pose $Y = X^2$
   (a) Calculez l'espérance de Y
   (b) Combien vaut la variance de X ?
   (c) Déterminer la variance de Y

(d) Quelle est la loi de $P = \dfrac{X+Y}{2}$?

(e) Quelle est la loi de $M = \dfrac{Y-X}{2}$?

3. Calculez les valeurs de :
   (a) $\mathbb{P}_{[Y=1]}[X=1]$
   (b) $\mathbb{P}_{[X=1]}[Y=1]$
   (c) $\mathbb{P}[P=M]$
   (d) $\mathbb{P}[PM=0]$
4. (a) Déterminer les valeurs de a et b vérifiant $\mathbb{P}_{[Y=1]}[X=1] = \mathbb{P}_{[P=0]}[X=0]$ puis représentez l'ensemble solution dans le plan cartésien.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b vérifiant $\mathbb{P}_{[Y=1]}[X=1] = \mathbb{P}_{[M=0]}[X=0]$ puis représentez l'ensemble solution dans le même graphique que précédamment.
   (c) Peut-on avoir simultanément $\mathbb{P}_{[Y=1]}[X=1] = \mathbb{P}_{[P=0]}[X=0]$ et $\mathbb{P}_{[Y=1]}[X=1] = \mathbb{P}_{[M=0]}[X=0]$?

Partie B

On tire X_1 ; ... ; X_n un échantillon de n variables aléatoires indépendantes de même loi que X et, pour chaque tirage X_i, on définit les variables Y_i, P_i et M_i comme précédemment.

1. On pose $S_P = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} P_i$
   (a) Montrez que S_P donne le nombre de tirages X_i égaux à 1.
   (b) Quelle est la loi de S_P ?
   (c) On estime b par $\hat{a}_1$. Calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_1$.
2. On suppose désormais que $a = b$.
   (a) Montrez que $a < \frac{1}{2}$
   (b) On pose $S_M = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i$.
   Expliquez pourquoi on peut estimer a par $\hat{a}_0 = \frac{1}{n} S_M$ puis calculez l'espérance et la variance de $\hat{a}_0$.
   (c) Pour $t \in [0;1]$ on pose $\hat{a}_t = t\hat{a}_1 + (1-t)\hat{a}_0$.
   Calculez, en fonction de t, l'espérance et la variance de $\hat{a}_t$ puis déterminer t^* qui rend $\mathbb{V}[\hat{a}_t]$ minimale.
   (d) En argumentant, dire quel serait le meilleur estimateur de a parmi $\hat{a}_0$, $\hat{a}_1$ ou encore $\hat{a}_{t^*}$
   (e) Démontrer finalement que :
   $$\hat{a}_{t^*} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

[D'après Ens-D2 Paris Saclay 2016]