Estimation et convergence

Inégalité de Markov

Soit X une variable aléatoire réelle positive admettant une espérance (bien que...). On a, pour tout $a > 0$:

$$\mathbb{P}[X \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{a}$$

Démonstration :
Considérons $A \in \mathcal{A}$: l'application $\mathbb{1}_A$ définie sur Ω renvoie 1 sur $A \in \mathcal{A}$ et 0 sur $\overline{A} \in \mathcal{A}$ puisque les tribus sont stables par passage au complémentaire.
Ainsi, $\mathbb{1}_A^{-1}(I) \in \{\emptyset; \Omega; A; \overline{A}\} \subset \mathcal{A}$ pour tout intervalle $I \subset \mathbb{R}$ faisant de $\mathbb{1}_A$ une variable aléatoire de l'espace considéré. De plus, elle est finie, donc elle admet une espérance et une variance. On a alors :

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = 0 \times \mathbb{P}\left(\overline{A}\right) + 1 \times \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}(A) \quad ; \quad \mathbb{V}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(A))$$

Remarque : En fait, $\mathbb{1}_A$ est une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(\mathbb{P}(A))$
Considérons à présent $r \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$ donnés et posons $A_r = [|X|^r \geq \lambda^r]$. Pa positivité, il est clair que A_r est réalisé si, et seulement si, $A_1 = [|X| \geq \lambda]$ est réalisé. Ainsi :

$$\lambda^r \mathbb{1}_{A_1} = \lambda^r \mathbb{1}_{A_r} \leq |X|^r$$

Doù l'on a $\mathbb{E}[\lambda^r \mathbb{1}_{A_1}] \leq \mathbb{E}[|X|^r]$ ce qui se réécrit alors (linéarité de $\mathbb{E}$ avec λ^r constante) :

$$\lambda^r \mathbb{P}(A_1) \leq \mathbb{E}[|X|^r] \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}[|X| \geq \lambda^r] \leq \frac{\mathbb{E}[|X|^r]}{\lambda^r}$$

En posant $r = 1$ on trouve l'inégalité de Markov.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle admettant des moments d'ordres 1 et 2. On a, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \leq \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

On va utiliser l'inégalité de Markov et la réécrire en travaillant avec la variable aléatoire $(X - \mathbb{E}[X])^2$ et en choisissant $\lambda = \varepsilon^2$ où $\varepsilon > 0$ est fixé :

$$\mathbb{P}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \lambda\right] = \mathbb{P}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \varepsilon^2\right]$$

mais comme $(X - \mathbb{E}[X])^2 \geq \varepsilon^2 \Leftrightarrow |X - \mathbb{E}[X]| \geq \varepsilon$ est vérifié, on trouve :

$$\mathbb{P}\left[X - \mathbb{E}[X] \geq \varepsilon\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]}{\varepsilon^2} = \frac{\mathbb{V}[X]}{\varepsilon^2}$$

sous couvert d'existence de l'espérance et de la variance de X.
Ces résultats s'appliquent sans peine pour obtenir la loi (faible) des grans nombres.