Interrogation $I_{\mathcal{P}}$

Exercice I : Des Poisson en somme

On considère λ et μ deux réels strictement positifs distincts

1. Soit n un entier naturel non nul. Etablir que :

$$\forall k \leq n \quad \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{k}\lambda^k \mu^{n-k}$$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{k!(n-k)!} e^{-\lambda} e^{-\mu} = e^{-(\lambda+\mu)} \frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}$$

3. Soient $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$, variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson.
   Démontrer que $S = X + Y$ suit encore une loi de Poisson mais de paramètre $\lambda + \mu$

   Indication : On pourra utiliser le fait que $[X + Y = n] = \bigcup_{k=0}^{n} ([X = k] \cap [Y = n-k])$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\forall i \leq n \left\{ \begin{array}{l} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \\ X_1 , \dots , X_n \text{ mutuellement indépendantes} \end{array} \right. \Longrightarrow S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \hookrightarrow \mathcal{P}(n\lambda)$$

Exercice II : L'empire des Poisson

On considère X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $a > 0$ que l'on cherche à estimer. On se donne un n-échantillon $(X_1 \dots X_n)$ de X constitué de variables aléatoires mutuellement indépendantes et on pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Vérifier que $\overline{X}_n$ admet une espérance et que cette espérance vaut a
2. Justifier que $\overline{X}_n$ admet une variance et que cette variance vérifie $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{V}[\overline{X}_n] = 0$
3. Démontrer que $n\overline{X}_n$ suit une loi de Poisson de paramètre na.

Exercice III : On finit en queue de Poisson

Soit Q une variable aléatoire suivante une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$
Pour X une VAR à valeurs dans $\mathbb{N}$ et a réel, on note $\mathbb{E}[\exp(-aX)]$ la quantité (sous couvert de convergence) définie comme :

$$\mathbb{E}[\exp(-aX)] = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-ak} \mathbb{P}[X = k]$$

1. Justifier que, pour tout $a > 0$, la valeur $\mathbb{E}[\exp(-aX)]$ existe bien dans $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\mathbb{E}[\exp(-aX)] = \exp\left(e^{-a\lambda} - \lambda\right)$
3. Soit $t > 0$ donné. En appliquant l'inégalité de Markov à la variable aléatoire e^{tX}, démontrer que : $\mathbb{P}[X \geq a] \leq e^{-at} \exp\left(e^t \lambda - \lambda\right)$
4. Déterminer l'inégalité de queue de Poisson, c'est-à-dire celle qui rend $e^{-at} \exp\left(e^t \lambda - \lambda\right)$ minimale (a étant fixé)