

# Intégrales Généralisées

## Rappels d'intégration de base

**Exercice 1** Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_{-1}^1 (x^2 - 5) dx$
2.  $\int_0^1 \frac{x}{2} (1 - x) dx$
3.  $\int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt$
4.  $\int_0^2 \left( \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) dt$
5.  $\int_0^2 3e^{4x} dx$
6.  $\int_0^2 \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx$
7.  $\int_1^2 \frac{t^3}{t^4 + 2} dt$
8.  $\int_1^3 e^{1-2t} dt$
9.  $\int_1^2 \left( \frac{x+1}{x^2 + 2x} \right) dx$
10.  $\int_1^2 u\sqrt{u} du$

**Exercice 2** Calculer les intégrales suivantes :

1.  $\int_{-1}^1 e^{3x-2} dx$
2.  $\int_0^a \frac{x}{2} e^{-x^2} dx \quad (a \in \mathbb{R})$
3.  $\int_0^2 u\sqrt{u^2 + 1} du$
4.  $\int_e^{e^n} \frac{1}{t \ln t} dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

**Exercice 3** Calculer, à l'aide d'intégrations par parties :

1.  $\int_1^t \ln x dx \quad (t > 0)$
2.  $\int_0^1 x^2 e^{-ax} dx \quad (a \in \mathbb{R})$
3.  $\int_0^2 t \ln(t+1) dt$
4.  $\int_0^x (2t+1)e^{-t} dt \quad (x \in \mathbb{R})$

## Théorème fondamental de l'intégration

**Exercice 4** Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive  $F$  s'annulant en 1 de la fonction  $f : t \mapsto t^2 \ln t$  définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Exercice 5** Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive  $F$  s'annulant en 0 de la fonction  $f : t \mapsto 2te^{-t/2}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

## Changement de variables

**Exercice 6** Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables :

1. (a) En posant  $u = e^x$ , calculer :
2. (a) En posant  $x = \frac{1}{1+u}$ , calculer :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+e^x}$$

$$\int_0^2 \frac{du}{(1+u)^2 e^{\frac{1}{1+u}}}$$

- (b) En posant  $x = \tan(\theta)$ , calculer :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

- (b) **Brutal!** En posant  $u = \sqrt{e^x - 1}$ , calculer :

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

On pourra retenir que la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$  admet pour primitive  $x \mapsto \arctan(x)$  sur  $\mathbb{R}$ , cette fonction étant la réciproque de  $\tan$  définie sur  $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

**Exercice 7** La trigo au secours de l'intégration

On (re)définit la fonction  $\tan : I = ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$  par la relation  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ .

1. Justifier que  $\tan$  est dérivable sur  $I$  et que l'on a  $\tan' = 1 + \tan^2$ .
2. Etablir que  $\tan$  ainsi définie réalise une bijection de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . On note  $\arctan$  sa bijection réciproque.
3. En déduire, en fonction de  $x \in \mathbb{R}$  une expression de  $\int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$  et en déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2}$$

On retiendra le résultat de cet exercice en termes de primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$

**Intégration par récurrence**

**Exercice 8** Les éléments simples les moins simples On pose, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$  :

$$J_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

1. Déterminer explicitement  $J_1(x)$  en fonction de  $x > 0$ .
2. On pose  $u_n(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^n}$  défini pour  $t \geq 0$ . Exprimer explicitement  $u'_n(t)$  en fonction de  $n$  et de  $t$ .
3. Etablir, pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x > 0$ , la relation (\*) :

$$J_n(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nJ_n(x) - 2nJ_{n+1}(x)$$

On pourra effectuer une intégration par parties et remarquer que  $x^2 = x^2 + 1 - 1$

4. Justifier que  $J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x)$  est une valeur réelle strictement positive bien définie.
5. A l'aide de la relation (\*), écrire une relation de récurrence liant  $J_{n+1}$  et  $J_n$ .
6. Donner les valeurs exactes de  $J_1$ ,  $J_2$  et  $J_3$  explicitement.

**Exercice 9** On définit une suite d'intégrales  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$  avec convention  $I_0 = \int_1^e dx$ .

1. Calculez  $I_0$  et  $I_1$
2. Pour  $x \in ]1; e[$  et  $n \in \mathbb{N}$ , vérifier que  $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
3. En déduire les variations puis le signe de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$
4. Etablir la relation de récurrence  $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$  pour  $n \in \mathbb{N}$
5. Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)I_n \leq e$  et en déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .
6. Quelle est la valeur de  $nI_n + I_n + I_{n+1}$  en fonction de  $n \in \mathbb{N}$ ? Calculez alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

## Intégrales généralisées

### Exercice 10 Introduction au concept

On écrit  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$  existe dans  $\mathbb{R}$ . On dira alors que l'intégrale  $\int_a^{+\infty} f(t)dt$  converge. Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale diverge.

1. Les intégrales suivantes convergent-elles ? Si oui, en donner la valeur.

$$1. \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad 2. \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{2}{x+2} dx \quad 4. \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+\pi t^2} dt$$

2. Démontrer que si  $f$  est une fonction continue et bornée sur  $\mathbb{R}$ , alors :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{+\infty} f(t)e^{-t} dt \text{ converge}$$

3. Etablir un résultat similaire si  $p$  est une fonction polynômiale réelle avec l'intégrale  $\int_a^{+\infty} p(t)e^{-t} dt$ .

4. Déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 x \ln x dx \quad 2. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \quad 3. \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 4. \int_0^{+\infty} \frac{x-3}{x^2+x+1} dx$$

### Exercice CV Pour chaque intégrale proposée, déterminer si elle converge ou non.

$$\begin{array}{llll} (1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx & (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)} dx & (3) \int_1^{+\infty} x^x dx & (4) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ (5) \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx & (6) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx & (7) \int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(t)} dt & (8) \int_{-1}^1 \frac{t^2-t}{\sqrt{1-t}} dt \end{array}$$

**Exercice 11 Introduction d'une célèbre fonction**

La fonction Gamma (notée  $\Gamma$ ) est définie au moyen de l'intégrale impropre :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Démontrer que, pour tout  $x > 0$ , l'intégrale définissant  $\Gamma(x)$  converge. Qu'en est-il pour  $x \leq 0$ ?
2. Calculer  $\Gamma(1)$ .
3. Démontrer que, pour tout  $x > 0$  on a  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .
4. En déduire que  $\forall n \in \mathbb{N} \Gamma(n+1) = n!$ .

**NB :** L'étude ou la connaissance de cette fonction peuvent être des attendus de concours ensD2 -Voir sujet 2014

**Exercice 12 •Θ<sup>C#</sup> Intégrale de Gauss** On définit une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}_+$  par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$$

1. Calculer  $f(0)$ .
2. On admet pour cette question que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que l'on a :

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$$

Calculer ainsi  $f'(x)$  pour  $x \geq 0$  et indiquer la valeur de  $f'(0)$ .

3. On pose  $g(x) = f(x^2)$ .
  - (a) Calculer  $g(0)$ .
  - (b) Justifier que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et vérifier que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+$  on a :  $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$
4. On définit enfin  $h(x) = g(x) + \left( \int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$ 
  - (a) Vérifier que  $h(0) = \frac{\pi}{4}$ .
  - (b) Démontrer que  $h$  est en fait constante sur  $\mathbb{R}_+$ . (Indication : on pourra prouver que  $h'$  nulle)
5. Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
6. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss :  $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
7. Retrouver alors que la fonction  $\varphi$  définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

est bien une densité de probabilité.