.

Intégrales Généralisées

La notion d'intégrale généralisée figure explicitement au programme des classes ens-D2. L'étude de certaines lois à densité y est directement liée. Ce supplément a pour objectif de fournir les fondements théoriques de l'utilisation des intégrales se dégageant de l'étude des lois à densité. Dans la suite, on parlera d'intégrales *impropres* pour introduire le concept.

Introduction des intégrales impropres

On commence par introduire la notion d'intégrale impropre sur un intervalle *semi-ouvert* c'est-à-dire en une borne pour laquelle la fonction intégrée n'est pas définie.

> **Définition** : On se donne a un réel et $b > a$ un réel ou $+\infty$. Soit f une fonction définie sur $[a; b[$ telle que, pour tous $x \in [a; b[$ on ait l'existence, dans $\mathbb{R}$, de la quantité $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
> Alors l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est dite *intégrale impropre en* b

On définira de façon très analogue l'intégrale impropre en a (tentative laissée au lecteur, en retenant qu'alors on pourrait considérer $a = -\infty$)

Vocabulaire. *On dira qu'une intégrale est impropre dès qu'elle est impropre en l'une de ses bornes.*

> **Définition** : Soit f une fonction définie sur $[a; b[$ telle que, pour tous $x \in [a; b[$ on ait l'existence, dans $\mathbb{R}$, de la quantité $\displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
> Si $\displaystyle\lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ existe dans $\mathbb{R}$, alors on pourra désigner par $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ cette quantité.

Vocabulaire. *L'intégrale impropre (en b) sera dite convergente (en la borne b) dans ce type de situation. On dira de cette intégrale impropre qu'elle est* divergente *dans le cas contraire.*

Des éléments analogues seront définis et écrits pour le cas des intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$ impropres en la borne a.

On pourra parfois rencontrer les abréviations CV et DV pour désigner des intégrales impropres convergentes et, respectivement, divergentes.

Exemple 1 : L'écriture $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t$ désigne une intégrale impropre en la borne 0. Comme on a :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to 0^+} \left[-\frac{1}{t}\right]_x^1 = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc cette intégrale impropre est divergente.

Exemple 2 : L'écriture $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\ dt$ désigne une intégrale impropre en la borne $+\infty$. Comme on a :

$$\lim_{x\to +\infty} \int_1^x \frac{1}{t^2}\ \mathrm{d}t = \lim_{x\to +\infty} \left[-\frac{1}{t}\right]_1^x = 1 \in \mathbb{R}$$

Donc cette intégrale impropre est convergente.

Pluralité de valeurs impropres

On peut définir une intégrale impropre en un ensemble fini de valeurs $-\infty \leq a < \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p < b \leq +\infty$. Pour ce faire, on considère pour chaque valeur α_k une intégrale impropre en la borne α_k et seulement en cette borne, en choisissant arbitrairement des valeurs $x_k \in]\alpha_{k-1}\ ;\ \alpha_k[$:

$$I_k^- = \int_{x_k}^{\alpha_k} f(t)\ \mathrm{d}t \quad ; \quad I_k^+ = \int_{\alpha_k}^{x_{k+1}} f(t)\ \mathrm{d}t \qquad (1 \leq k \leq p)$$

et une intégrale (impropre, dans le cas où a serait une borne impropre) $I_0 = \displaystyle\int_a^{x_1} f(t)\ \mathrm{d}t$ ainsi que, de façon analogue avec b, une intégrale (éventuellement impropre) $I_{p+1} = \displaystyle\int_{x_{p+1}}^{b} f(t)\ dt$.

On procède à l'étude de la convergence de chacune de ces intégrales impropres puis, si chacune converge, on peut considérer l'écriture de $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ comme celle d'une intégrale convergente. On peut alors définir :

$$\int_a^b f(t)\ dt = I_0 + (I_1^- + I_1^+) + \cdots + (I_p^- + I_p^+) + I_{p+1}$$

Exemple 3 : L'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t(t-1)(t-2)}\ \mathrm{d}t$ est impropre en les valeurs $0; 1$ et 2. Il convient d'étudier des intégrales impropres de la forme :

$$I_0 = \int_0^{x_1} \frac{1}{t(t-1)(t-2)}\ \mathrm{d}t \quad ; \quad I_1^- = \int_{x_1}^{1} \frac{1}{t(t-1)(t-2)}\ \mathrm{d}t \quad ; \quad I_1^+ = \int_1^{x_2} \frac{1}{t(t-1)(t-2)}\ \mathrm{d}t \quad ; \quad I_2 = \int_{x_2}^{2} \frac{1}{t(t-1)(t-2)}\ \mathrm{d}t$$

les choix des valeurs de x_1 et x_2 pouvant rester arbitraire (mais avec $x_1 \in]0; 1[$ et $x_2 \in]1; 2[$).
En l'occurence, le lecteur pourra vérifier que I_0 est divergente, quel que soit le choix de x_1, et que donc, l'intégrale impropre initiale diverge.

Exemple 4 : On propose de traiter (en classe) l'étude et calcul de $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-|t|}}$

Techniques de calcul et intégrales impropres

Propriétés : Les propriétés associées aux terminologies suivantes sont conservées avec les intégrales impropres et peuvent donc être pratiquées directement sur l'intégrale impropre, en considérant $(a; b) \in \overline{\mathbb{R}}^2$, f et g deux fonctions définies sur tout intervalle de bornes a et b, chacune étant indifféremment ouverte ou fermée, et pour lesquelles chaque écriture d'intégrale impropre employée désigne bien une intérgale convergente.

- **Linéarité :** Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, sous couvert de vérification des convergences, on a :

$$\int_a^b (\lambda f(t) + g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \ + \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

- **Relation de Chasles :** Pour tout $c \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que chaque intégrale impropre écrite soit définie et convergente, on a :

$$\int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t \ + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

- **Positivité :** Sous couvert de vérification des convergences on a :

Si f est définie et positive sur $]a; b[$ sauf éventuellement en quelques points, alors on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$

- **Ordre :** Sous couvert de vérification des convergences, pour f et g sont définies sur $]a;b[$, sauf éventuellement en quelques points, on a :

$$\text{Si } f \leq g \text{ sur }]a;b[\text{ (sauf éventuellement en quelques points) alors on a } \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \ \leq \ \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$$

- **Orientation :** Sous couvert de vérification des convergences, on a :

$$-\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t$$

Nous nous concentrons ensuite sur des résultats permettant d'établir la convergence d'une intégrale impropre. Ainsi, ces critères sont voués à être appliqués lors de l'étude en une borne impropre à la fois et seront donc rédigés dans le cas d'étude associés sur $[a;b[$ pour des fonctions intégrables sur tout segment $[a;x] \subset [a;b[$, avec a réel et $b > a$ réel ou $+\infty$.

Le lecteur pourra adapter aisément ces énoncés aux intervalles de type $]a;b]$.

Convergences d'intégrales impropre - cas des fonctions positives

Dans toute cette section, les résultats porteront sur des fonctions supposées positives sur $[a;b[$.

Propriété - convergence monotone :

Soit f continue et positive sur $[a;b[$. Si $\varphi : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$ est majorée sur $[a;b[$ alors l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ converge

Pour le prouver : On observera que $f \geq 0$ est la dérivée de la fonction φ dans cette propriété.

Propriété - Critère de convergence par comparaison :
Soient f et g continues sur $[a;b[$ et positives au voisinage de b.
Si l'on a $f \leq g$, au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\ CV \implies \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\ CV$

Pour le prouver : Remarquer que la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ permet de considérer $M = \displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$ et se restreindre à un voisinage de b sur lequel $f \leq g$ permet de se ramener à la propriété qui précède.

Propriété - critère de convergence par équivalents :
Soient f et g continues sur $[a;b[$ et positives au voisinage de b.
Si l'on a $f \sim g$, au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\ CV \iff \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\ CV$

NB : On peut retenir que les intégrales impropres de fonctions positives, équivalentes entre elles au voisinage d'une borne impropre ont même nature.

Propriété - critère de convergence par petit o (négligeabilité) :
Soient f et g continues sur $[a;b[$ avec g positives au voisinage de b.
Si l'on a $f = o(g)$, au voisinage de b, alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t\ CV \implies \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t\ CV$

Convergence Absolue

Définition
On dit de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ qu'elle converge absolument (en abrégé, CVA) lorsque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\ \mathrm{d}t$ converge.

Exemple 5 : Considérons $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2}\,\mathrm{d}t$ impropre en $+\infty$. On note $f : t \mapsto \dfrac{\sin t}{t^2}$ définie, continue sur $[1;+\infty[$.

Comme $\forall t \in [1;+\infty[\ \ -1 \leq \sin t \leq 1$ on a $|f(t)| \leq \dfrac{1}{t^2}$ pour $t \geq 1$. Or, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (déjà vu en **exemple 2**) donc, par critère de comparaison (la positivité de $|f|$ étant claire) on trouve que $\displaystyle\int_1^{+\infty} |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est aussi convergente.
Il vient donc que I converge absolument (CVA)

Propriété :
Si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge absolument, alors cette intégrale impropre converge aussi (au sens premier)

On pourra retenir en abrégé que $CVA \implies CV$ pour les intégrales impropres.
Pour le prouver : On pourra observer que toute fonction f continue sur $[a;b[$ peut se décomposer en $f_+ - f_-$ avec f_+ et f_- continues, positives sur $[a;b[$, de sorte que $f(t) \geq 0 \implies f(t) = f_+(t)$ et $f(t) \leq 0 \implies f(t) = -f_-(t)$.

Convergences d'intégrales impropres de référence

Les résultats concernant la convergence des intégrales impropres qui suivent pourront être connus. Ils peuvent être démontrés en guise d'exercices (ceci constituant un savoir-faire exigible)

Propriétés (convergences de référence) :
On se donne $(a;b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a < b$ ainsi que α un réel. On a alors :
- Les intégrales impropres du type $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent si et seulement si $\alpha > 1$.
- Les intégrales impropres du type $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}\,\mathrm{d}t$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.
- Les intégrales impropres du type $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ convergent si et seulement si $\alpha > 0$.

Démonstration : [Exercices]