.

Vocabulaire des Espaces vectoriels

Nous proposons ici de présenter les notions essentielles rencontrées dans le contexte des espaces vectoriels. La notion étant nouvelle, seuls les exemples s'appuient, éventuellement, sur des acquis antérieur.

Comme à l'accoutumée, l'ordre d'exposition proposé est induit par la cohérence logique permettant de définir les concepts suivant à partir des concepts qui précèdent.

Espaces Vectoriels

∇ **Espace vectoriel sur $\mathbb{R}$** :

Ensemble muni d'opérations noté $(E, +, \cdot)$, dans lequel on distingue un élément 0_E particlier, vérifiant les *axiomes* suivant :

- $+$ est une application du type $+ : E \times E \longrightarrow E$. On écrit $x + y$ au lieu de $+(x; y)$
- $\cdot$ est une application du type $\cdot : \mathbb{R} \times E \longrightarrow E$. On écrit $\lambda \cdot x$ au lieu de $\cdot(\lambda; x)$
- $\forall x \in E \;\; 0_E + x = x + 0_E = x$
- $\forall (x; y; z) \in E^3 \;\; x + (y + z) = (x + y) + z$
- $\forall x \in E \; \exists y \in E \;\; x + y = y + x = 0_E$ (et on écrit $y = -x$ dans ce cas)
- $\forall (x; y) \in E^2 \;\; x + y = y + x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall (x; y) \in E^2 \;\; \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x \;\; + \;\; \lambda \cdot y$
- $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \; \forall x \in E \;\; (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x \;\; + \;\; \mu \cdot x$
- $\forall (\lambda; \mu) \in \mathbb{R}^2 \; \forall x \in E \;\; (\lambda \times \mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \; \forall x \in E \;\; 0_{\mathbb{R}} \cdot x = 0_E \;\; \wedge \;\; \lambda \cdot 0_E = 0_E \;\; \wedge \;\; 1 \cdot x = x$

Remarques :

le $+$ entre λ et μ est l'addition dans $\mathbb{R}$ usuelle. Le $+$ entre x et y (voire z) est l'application définie au travers de ces axiomes.

Parfois, on va jusqu'à omettre le $\cdot$ si le contexte est clair (comme dans $2\vec{u} = 2 \cdot \vec{u}$)

Dans des cas (extrêmes...) où une distinction serait nécessaire, on peut toujours alourdir les notations et écrire $\lambda +_{\mathbb{R}} \mu$ ainsi que $x +_E y$ pour préciser le type de l'opération employée.

Important ! La cas particulier de l'espace vectoriel $(\mathbb{R}^n \; ; \; + \; ; \; \cdot)$ doit être connu et maîtrisé.

Vocabulaire :

— Les éléments d'un espace vectoriel sont appelés *vecteur*
— Les éléments de $\mathbb{R}$, dans ce contexte, peuvent être nommés *scalaire*
— L'élément 0_E est nommé *vecteur nul*
— L'opération (ou loi) $+_E$ peut être nommée *addition vectorielle* et est dite interne.
— L'opération (ou loi) $+_E$ peut être nommée *multiplication scalaire* et est dite externe.

☐ **Espace vectoriel $\mathbb{R}^n$** Pour $n \geq 1$, ensemble $\mathbb{R}^n$ muni des opérations $+$ et $\cdot$ suivantes :

$$\begin{array}{rl} \forall x = (x_i) \in \mathbb{R}^n \;\; \forall y = (y_i) \in \mathbb{R}^n & (x_1; \ldots; x_n) + (y_1; \ldots; y_n) = (x_1 + y_1 \; ; \; \ldots \; ; \; x_n + y_n) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} \;\; \forall x = (x_i) \in \mathbb{R}^n & \lambda \cdot (x_1; \ldots; x_n) = (\lambda x_1 \; ; \; \ldots \; ; \; \lambda x_n) \\ 0_{\mathbb{R}^n} & = (0 \; ; \; \ldots \; ; \; 0) \end{array}$$

☐ **Sous-espaces vectoriel** : Sous-ensemble F d'un espace vectoriel E muni des mêmes opérations que E stable pour $+$ et $\cdot$ et contenant le vecteur nul 0_E.

☐ **Combinaison linéaire** : Toute somme *finie* de vecteurs de E, munis (pour chacun) d'un coefficient scalaire :

$$\text{combinaison linéaire de } p \text{ vecteurs} \equiv \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot u_k$$

☐ **Famille de vecteurs** : Liste (éventuellement suite) d'éléments de E.

☐ **Famille libre (de p vecteurs)** : Famille de vecteurs $(u_1 \dots u_p)$ vérifiant :

$$\forall \lambda = (\lambda_k)_{k \leq p} \in \mathbb{R}^p \ \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \cdot u_k = 0_E \ \Rightarrow \ \forall k \leq p \ \ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$$

Pour le cas d'une famille $\mathcal{F}$ infinie, on demandera simplement que tout sous-famille finie soit libre.

☐ **Famille génératrice (de vecteurs) de F** : Famille de vecteurs $\mathcal{F} = (u_1 \dots u_n)$ **de** F telle que tout élément $w \in F$ s'écrivent comme combinaison linéaire d'éléments de la famille $\mathcal{F}$
Remarque : On peut alors écrire que $F = vect(\mathcal{F})$.

☐ **Base de F** famille libre et génératrice de F.

☐ **Dimension de F** Cardinal de toute base de F.

☐ **Droite vectorielle** Espace vectoriel de dimension 1.

☐ **Hyperplan de E** *(En dimension finie)* : Sous-Espace vectoriel de E de dimension $n - 1$.

☐ **Somme de sous-espaces vectoriels de E** Ensemble $F + G$ des sommes $u + v$ de $(u; v) \in F \times G$.
Remarque : C'est aussi un sous-espace vectoriel de E.

∇ **Somme directe de deux sous-espaces vectoriels de E** Cas particulier de $F + G$ avec :

$$F + G = E \quad \wedge \quad F \cap G = \{O_E\}$$

Remarque : Ne se généralise pas aisément à n termes $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$. On passera par la caractérisation par concaténation des bases.

∇ **Supplémentaire de F dans E** Sous-espace vectoriel H de E tel que $F \oplus H = E$

Espaces vectoriels de référence :

- Ensemble $\mathbb{R}^n$ des n-uplets de réels. On a dim$(\mathbb{R}^n) = n$
- Ensemble $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices $n \times p$ à coefficients réels. dim$(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})) = np$
  Les cas particuliers des matrices carrées $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, colonnes $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et lignes $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})$ sont à retenir :
  — On a dim$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$
  — On a dim$(\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})) = n$ et dim$(\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{R})) = p$
- Ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de l'espace vectoriel E dans l'espace vectoriel F.
  L'analogie avec l'ensemble des matrices à connaître puisque les matrices représentent ces applications en dimension finie
- Ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (dimension infinie). On retiendra surtout les sous-espaces vectoriels importants suivant :
  — Ensembles $\mathcal{C}^p(I)$ des applications de classe $\mathcal{C} - p$ définies sur I
  — Ensemble des suites réelles $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (dimension infinie)
  — Ensemble des polynômes à coefficients réels $\mathbb{R}[X]$ (dimension infinie) confondu avec les applications polynômiales.
  Le cas particulier de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n + 1$ est souvent utilisé pour l'étude d'applications linéaires