Vocabulaire des V.A.R. à Densité

Les notions données dans cette fiche s'appuient sur et complètent celle des Variables Aléatoires Réelles donnée en première année. En particulier, on considère connus les éléments de la section **Vocabulaire (et notations) des variables aléatoires** associée.

Eléments caractéristiques :

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et on considère que X est une VAR à densité définie sur cet espace.
On remarquera que, en dehors de l'espérance, les définitions sont formellement identiques à celles des variables aléatoires discrètes. Il s'agit de garder à l'esprit que, la formule de l'espérance $\mathbb{E}[X]$ étant distincte, les concepts qui en découlent se fondent sur cette dernière.

- ☐ **Densité :** On appelle *densité de probabilités* toute fonction f continue sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points, positive sur $\mathbb{R}$ et telle que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\ \mathrm{d}x$ converge et vaut exactement 1.
- ☐ **VAR à densité :** Toute variable aléatoire X dont la fonction de répartition F_X vérifie :
  — F_X est continue sur tout $\mathbb{R}$ (sans exception)
  — F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Indicateurs des VAR à densité :

On pourra désigner par f_X une densité de X et par F_X la fonction de répartition de X.

- ☐ **Espérance :** Valeur, sous réserve de *convergence absolue*, définie par la formule : $\mathbb{E}[X] = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)\ \mathrm{d}x$
  Remarque : Existence assurée si f_X est continue sur un segment I.

- ☐ **Variance :** Valeur définie, sous couvert d'existence, comme : $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right]$
  Remarque : Définition invariante selon les cas discrets et continus.

- ☐ **Ecart-type :** Sous-couvert d'existence de $\mathbb{V}[X]$, valeur $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[X]}$.

- ☐ **Moment (d'ordre r) :** Avec $r \in \mathbb{N}^*$, valeur, sous couvert d'existence définie par la formule : $m_r[X] = \mathbb{E}\left[X^r\right]$
  Remarque : Existence assurée si X est (presque-sûrement) finie. Le programme exige la connaissance du cas $r = 2$.

- ☐ **VAR centrée :** On dit de X qu'elle est centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$.

- ☐ **VAR réduite :** On dit de X qu'elle est réduite lorsque $\mathbb{V}[X] = 1$.

- ☐ **VAR centrée-réduite :** On dit de X qu'elle est centrée lorsque $\mathbb{E}[X] = 0$ et que $\mathbb{V}[X] = 1$.

- ☐ **VAR centrée-réduite associée :** On définit X^* associée à X comme : $X^* = \dfrac{1}{\sigma(X)} \cdot (X - \mathbb{E}[X])$ dès lors que $\sigma(X) \neq 0$ ce qui revient à demander X non presque-sûrement certaine