.

Vocabulaire des Espaces Probabilisés

Nous rappelons ici les éléments de théorie générale des probabilités en considérant Ω infini.
Le symbole ∇ mentionne les notions n'étant pas exigible au programme actuel mais dont la connaissance permet une meilleure compréhension des notions (tout en ayant déjà été mentionné dans un programme ou sujet antérieur).

Vocabulaire de base (rappels et extensions)

☐ **Issue** : Toute possibilité observable résultant d'une expérience aléatoire.

☐ **Univers** : Un univers Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Il dépend donc de l'expérience considérée. On pourra désormais le considérer non fini.

☐ **Evénement** : Partie E de l'univers $\mathcal{U}$ recevable dans l'étude.
On désigne de façon générale par *tribu* l'ensemble des événements d'un univers donné.

☐ **Evénement atomique (ou élémentaire)** : Evénement à une seule issue (un singleton).

☐ **Evénement impossible :** L'ensemble $\emptyset$ dans le contexte des expériences aléatoires.

☐ **Evénements incompatibles :** Deux événements A et B vérifiant $A \cap B = \emptyset$
On pourra dire *compatibles* dans le cas contraire.

☐ **Evénement contraire :** L'ensemble noté $\overline{A}$ défini par $\overline{A} = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}$.

∇ **Tribu $\mathcal{A}$ des événéments :** Ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ de tous les événements associés à l'expérience d'univers Ω. Elle doit vérifier les propriétés axiomatiques suivantes :
- $\emptyset \in \mathcal{A}$ et $\Omega \in \mathcal{A}$
- Stabilité par unions dénombrables :
  pour toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pris dans $\mathcal{A}$ on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire que toute union d'une suite d'événements est un événement
- Stabilité par passage au complémentaire :
  Si l'on a $A \in \mathcal{A}$ alors $\overline{A} \in \mathcal{A}$, c'est-à-dire que tout complémentaire d'un événement est un événement.

Remarque : les tribus sont aussi stables par intersections dénombrables (propriété).

∇ **Espace probabilisable :** Le couple $(\Omega\ ;\ \mathcal{A})$ formé par l'univers Ω et la tribu $\mathcal{A}$.

☐ **Probabilité :** Application $\mathbb{P}$ définie sur une tribu $\mathcal{A}$ à valeurs dans $[0; 1]$ vérifiant :
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
- $\forall A \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements pris dans $\mathcal{A}$ *deux à deux incompatibles* on a :

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}[A_k] = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[A_k]$$

☐ **Espace probabilisé :** Le triplet $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ où $\mathbb{P}$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega\ ;\ \mathcal{A})$

☐ **Système Complet d'Evénements (cas fini) :** Toute liste d'événements $A_1; \ldots; A_n$ d'un même univers Ω vérifivant :

1. La réunion de tous ces événements est Ω
2. Ces événements sont deux à deux incompatibles.

☐ **Système Complet d'Evénements (cas général) :** Toute suite d'événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un même univers Ω vérifiant :

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$
2. $\forall i \neq j \quad A_i \cap A_j = \emptyset$

Vocabulaire associé au calcul de probabilités

Dans cette section, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ et on notera A un événement de cet espace de probabilité non nulle.

☐ **Probabilités élémentaires :** Valeur de probabilité d'un événement élémentaire.

∇ **Evénement négligeable :** Evénement de probabilité nulle.
Attention ! Ce n'est pas nécessairement $\emptyset$.

∇ **Evénement presque sûr :** Evénement de probabilité 1 (un).
Attention ! Ce n'est pas nécessairement Ω.

☐ **Probabilité Conditionnelle (sachant A) :** Il s'agit de la probabilité notée $\mathbb{P}_A$ vérifiant :

$$\forall E \in \mathcal{A} \quad \mathbb{P}_A(E) = \frac{\mathbb{P}(A \cap E)}{\mathbb{P}(A)}$$

Définie seulement pour $\mathbb{P}(A) \neq 0$

☐ **Evénements indépendants :** On dit que B est indépendant de A lorsque $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.
Remarque : Par convention, on pourra dire que tout événement B est indépendant de $\emptyset$.

☐ **Indépendance mutuelle d'événements :** Pour $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite d'événements de $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$, on parlera d'indépendance mutuelle lorsque toute liste finie $(E_{i_1}\ ;\ E_{i_2}\ ;\ \ldots\ ;\ E_{i_n})$ vérifie :

$$\mathbb{P}\left(E_{i_1}\ \cap\ E_{i_2}\ \cap\ \ldots\ \cap\ E_{i_n}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}[E_{i_k}]$$