

Formulaire

Le présent document a pour but de recenser les diverses formules (générales) les plus classiques (et attendues) en probabilités (hors définitions).

Le symbole $\circ$ fait figure de formule supposée déjà connue au lycée.

Le symbole $\square$ mentionne les formules de CPGE dont la connaissance est attendue et exigible.

Probabilités Générales

On se place dans un espace probabilisé $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ dans toute cette section.

$\circ$ Probabilités uniformes :

Si $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ fini, alors pour tout $A \in \mathcal{A}$ on a $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$

$\circ$ Formules du crible (Poincaré) - cas $n = 2$:

Si A et B sont deux événements de $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$$

$\square$ Formules du crible (Poincaré) cas $n = 3$:

Si A, B et C sont trois événements de $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ alors :

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

Le cas n le plus général n'est pas un attendu du cycle préparatoire.

$\circ$ Croissance des probabilités :

Si $A \subset B$ sont deux événements de $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$ alors $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

$\square$ Théorème de limite monotone :

— Pour toute suite croissante (au sens de l'inclusion) d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$

— Pour toute suite décroissante (au sens de l'inclusion) d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(A_n)$

$\square$ Corollaire du Théorème de limite monotone :

Pour toute suite d'événements $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ on a :

- $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcup_{k=0}^n A_k\right)$
- $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=0}^n A_k\right)$

$\square$ Convexité des probabilités :

Pour $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'événements de $(\Omega ; \mathcal{A} ; \mathbb{P})$, on a l'inégalité :

$$\mathbb{P}\left[\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right] \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

(le second membre pouvant être éventuellement $+\infty$).

◦ **Formule des probabilités totales (cas fini) :**

Soit N un entier naturel non nul. Si $(A_n)_{n \leq N}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \leq N} \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

Si, de plus, les A_n sont tous de probabilités respectives non nulles alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{n \leq N} \mathbb{P}(A_n) \mathbb{P}_{A_n}(B)$$

□ **Formule des probabilités totales (cas général) :**

Soit $I \subset \mathbb{N}$ donné. Si $(A_n)_{n \in I}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(B \cap A_i)$$

Si, de plus, les A_i sont tous de probabilités respectives non nulles alors :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B)$$

et chacune des ces sommes converge.

□ **Formule des probabilités composées :**

Soient $A_1 \dots A_n$ des événements tels que $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}$ ne soit pas négligeable. Alors :

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \cdot \mathbb{P}_{A_1}(A_2) \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \cdot \dots \cdot \mathbb{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$$

□ **Formule de Bayes (cas fini) :**

Soit N un entier naturel non nul. Si $(A_n)_{n \leq N}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ non-négligeable on a :

$$\forall i \leq N \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\sum_{n \leq N} \mathbb{P}(B \cap A_n)}$$

Si, de plus, les A_n sont tous non-négligeables alors :

$$\forall i \leq N \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\sum_{n \leq N} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{n \leq N} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)}$$

□ **Formule de Bayes (cas général) :**

Soit $I \subset \mathbb{N}$ donné. Si $(A_n)_{n \in I}$ est un système complet d'événements, alors pour tout $B \in \mathcal{A}$ non-négligeable on a :

$$\forall i \in I \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\sum_{n \in I} \mathbb{P}(B \cap A_n)}$$

Si, de plus, les A_n sont tous non-négligeables alors :

$$\forall i \in I \quad \mathbb{P}_B(A_i) = \frac{\mathbb{P}(A_i \cap B)}{\sum_{n \in I} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A_i) \cdot \mathbb{P}_{A_i}(B)}{\sum_{n \in I} \mathbb{P}(A_n) \cdot \mathbb{P}_{A_n}(B)}$$