

Applications linéaires

Exercice L Pour chaque application proposée, dire si elle est linéaire de E vers F pour les espaces proposés :

- | | |
|--|--|
| <p>1 $x \mapsto 2x^2$
($E = \mathbb{R}$; $F = \mathbb{R}$)</p> | <p>6 $(x; y; z) \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 0 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$
($E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$)</p> |
| <p>2 $(x; y) \mapsto 2x - 4y + 2$
($E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}$)</p> | <p>7 $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y \\ t \end{pmatrix}$
($E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $F = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$)</p> |
| <p>3 $(x; y; z) \mapsto (x + y ; y - z ; z + 2x ; 3x + 4y - \frac{1}{3}z)$
($E = \mathbb{R}^3$; $F = \mathbb{R}^4$)</p> | <p>8 $(x; y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 5y^2}$
($E = \mathbb{R}^2$; $F = \mathbb{R}$)</p> |
| <p>4 $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
($E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$; $F = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$)</p> | <p>9 $M \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} M$
($(E = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R})$; $F = \mathcal{M}_{3,8}(\mathbb{R})$)</p> |
| <p>5 $(x_1; \dots; x_n) \mapsto \max_{i \leq n} x_i$
($E = \mathbb{R}^n$; $F = \mathbb{R}$)</p> | <p>10 $(x_1; x_2; \dots; x_{n-1}; x_n) \mapsto (x_2; \dots; x_{n-1})$
($E = \mathbb{R}^n$; $F = \mathbb{R}^{n-2}$)</p> |

Parmi les applications linéaires, lesquelles sont des endomorphismes ?

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne, pour $1 \leq k \leq n$, une application π_k définie sur $\mathbb{R}^n$ par $\pi_k(chu) = x_k$ où l'on note $chu = (x_1; x_2 \dots; x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Etablir que π_k est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On l'appelle *projection canonique selon la k-ème coordonnée*.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel. Etablir que les applications suivantes sont linéaires :

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\longrightarrow E \times E & \psi : E &\longrightarrow E^3 \\ (x; y) &\mapsto (y; x) & x &\mapsto (x; \pi \cdot x; \sqrt{2} \cdot x) \end{aligned}$$

Exercice 3 Pour une série statistique quantitative de valeurs réelles $x_1; x_2; \dots; x_n$, on désigne par $\bar{x}$ sa moyenne et σ_x son écart-type.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul fixé.

- Démontrer que l'application $(x_1 \dots x_n) \mapsto \bar{x}$ est linéaire en précisant les espaces de départ et d'arrivée. Qu'en est-il de $(x_1 \dots x_n) \mapsto \sigma_x$?
- Soient $P = (p_i)_{i \leq n}$ une n -liste de *poids* strictement positifs. On rappelle que la moyenne pondérée par les poids $p_1 \dots p_n$ se calcule :

$$\mu_P(x) = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

Etablir que $\mu_P : x \mapsto \mu_P(x)$ est également linéaire sur les mêmes espaces.

- On fixe $x = (x_1 \dots x_n)$. Peut-on dire que $\psi : P \mapsto \mu_P(x)$ est linéaire ?
- Déterminer la dimension de $\ker(\mu_P)$. En donner une représentation graphique pour $n = 2$ avec $p_1 = p_2 = 1$.

Exercice 4 • $\Theta^{\mathbb{C}\sharp}$ On se place dans l'espace $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre $n \geq 2$.

1. Démontrer que $trans : X \mapsto {}^tX$ est linéaire et en déterminer le noyau. En déduire que $trans$ est un automorphisme de E .

2. On définit sur E l'application *trace* notée tr par : $tr : X \mapsto \sum_{k=1}^n X_{kk}$.

Justifier que tr est une forme linéaire de E puis déterminer une base et la dimension de son noyau.

3. L'application $det : M \mapsto det(M)$ est-elle linéaire sur E ?

Exercice 5 • $\Theta^{\mathbb{C}\sharp}$ On se donne φ définie sur $\mathbb{R}^3$ par $\varphi(x; y; z) = (3x - 2y + z; 2y - z)$.

Identifier $ker(\varphi)$ ainsi $Im(\varphi)$ en précisant les espaces vectoriels de référence dans lesquels ils sont inclus.

Exercice 6 • $\Theta^{\mathbb{C}\sharp}$ On considère une application linéaire $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ satisfaisant les relations suivantes :

$$\varphi(2; 1) = (1; 0; 1) \quad ; \quad \varphi(-1; 1) = (0; 1; 1)$$

Démontrer qu'il existe une unique φ ainsi définie et déterminer son noyau et son image.

Exercice 7 • $\Theta^{\mathbb{C}\sharp}$ On se donne φ définie sur $\mathbb{R}^2$, une application linéaire dont le noyau est $K = vect(1; -2)$ et l'image $vect(2; 1; 0)$.

Décrire une telle application φ au moyen de son expression générale, identifier ses espaces de départ et d'arrivée.

Y-a-t-il unicité d'une telle application φ ?

Exercice 8 • $\Theta^{\mathbb{C}\sharp}$ On note $(e_1; e_2; e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On pose ensuite, pour $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$:

$$\varphi(e_1) = e_2 - e_3 \quad ; \quad \varphi(e_2) = 2e_1 + 3e_2 + e_3 \quad ; \quad \varphi(e_3) = e_1 - 4e_2 + e_3$$

Expliciter $\varphi(x; y; z)$ de façon générale et déterminer noyau et image de φ . Cette application est-elle un isomorphisme ?

Exercice 9 • $\Theta^{\mathbb{C}\sharp}$ On considère les applications u et v définies sur $\mathbb{R}^4$ par :

$$u(x; y; z; t) = (x; -y; x + z; 2t) \quad ; \quad v(x; y; z; t) = (y; x; x - z; t)$$

1. Vérifier que u et v sont des automorphismes.

2. Justifier que $u + v$ et $u - v$ sont des applications linéaires. Sont-ce des automorphismes ?

Exercice 10 *Une caractérisation à retenir*

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer qu'on a :

$$E = ker(f) \oplus im(f) \Leftrightarrow ker(f) = ker(f^2) \wedge im(f) = im(f^2)$$

Exercice 11 • $\Theta^{\mathbb{C}\sharp}$ *Une étude des hyperplans*

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$. On note φ une forme linéaire définie sur $\mathbb{R}^n$.

1. Démontrer que, si φ est non nulle, le noyau de φ est de dimension $n - 1$.

2. Justifier que la matrice de φ dans la base canonique est une matrice ligne.

On note alors $A = (a_1; \dots; a_n)$ cette matrice ligne.

3. Justifier que le noyau de φ s'écrit $\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$.

4. Etablir que tout ensemble de la forme $\{(x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0\}$ est le noyau d'une forme linéaire.

5. En déduire que les solutions de tout système linéaire homogène forment un espace vectoriel.

Exercice 12 A partir des matrices

Les matrices suivantes représentent des applications linéaires dans les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$. Donner les noyau et image respectifs de ces applications (dont on donnera une base et la dimension).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \\ 4 & 0 & 10 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 \\ -13 & 24 & -4 \\ 6 & -12 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 13 Donner les matrices

1. Pour chaque application définie, vérifier qu'elle est linéaire puis donner sa matrice relativement aux bases canoniques. On veillera à identifier si besoin les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.

(a) L'application $f : (x; y) \mapsto (2x - y; 3y)$

(b) L'application $g : (x; y; z; t) \mapsto (z - x; y + 2t; x + y + z - t)$

(c) L'application $h : (x; y; z) \mapsto (x + y + z; 3z - 2y)$

(d) L'application $M_A : X \mapsto \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} X$ avec $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

2. Pour chacune des applications précédentes, déterminer l'image et le noyau. On indiquera leurs dimensions respectives.

Exercice 14 On note f et g les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ admettant pour matrices respectives, relativement aux bases canoniques :

$$Mat_f = A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad ; \quad Mat_g = B = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (u_1; u_2; u_3)$ avec $u_1 = (1; -1; 1)$ et $u_2 = (1; 0; 0)$ et $u_3 = (0; -1; 2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer les matrices de f et g relativement à la base $\mathcal{B}$.

3. Démontrer que $\mathcal{C} = (u_3 - u_1 + 2u_2; u_2 - u_1; u_1)$ avec $v_1 = (1; 0; 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4. Déterminer les matrices de f et g relativement à la base $\mathcal{C}$.

Exercice 15 Déterminer les rangs des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 16 Déterminer, en fonction de $a \in \mathbb{R}$, le rang de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & a \end{pmatrix}$.

Dans le cas où A serait inversible, préciser son inverse.

Exercice 17 Pour a et b deux réels donnés, on définit la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 & b \\ 3 & 0 & 1 & -4 \\ 5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Démontrer que $rg(A) \geq 2$. Pour quelles valeurs de a et de b a-t-on $rg(A) = 2$?

Exercice 18 Soit E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

On définit un endomorphisme f de E tel que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ avec $\mathcal{B}$ base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Justifier que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$. A-t-on f projecteur?

Exercice 19 Déterminer les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et expliciter les sous-espaces propres associés.

Exercice 20 On rappelle que la matrice Attila d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est la matrice $H_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont des uns. Retrouver la relation liant H_n^k avec H_n (pour $k \in \mathbb{N}^*$) et en déduire les valeurs propres de H_n . Quel est le rang de H_n ?

Exercice 21 (D'après EML 2014 voie E)

Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} ; (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$.

- Démontrer que F est un sous-espace vectoriel de E et en donner une base.
- On note $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on définit f sur F par $f(N) = TNT$. Justifier que $f \in GL(F)$.
- La famille $\mathcal{B} = (E_{1\ 1} ; E_{1\ 2} ; E_{2\ 1} ; E_{2\ 2})$ désigne la base canonique de E .
Démontrer que la sous-famille $\mathcal{A} = (E_{1\ 1} ; E_{1\ 2} ; E_{2\ 2})$ est une base de F .
- Déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}(f)$, la matrice de f relativement à la base $\mathcal{A}$.
- Etablir que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $S_{\lambda} = \{M \in F ; f(M) = \lambda M\}$ est un sous-espace vectoriel de F .
- Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ pour lesquels S_{λ} est de dimension non nulle.

Exercice 22 (D'après concours ENS-D2 Paris-Saclay 2016)

On considère les applications u et v définies par :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (z_1; z_2; z_3) &\longmapsto (2z_1 - z_3; 3z_1 + z_2 + 2z_3) \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} v : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (z_1; z_2) &\longmapsto (z_1 + z_2; -z_2; 2z_1 - z_2) \end{aligned}$$

- Vérifier que u est une application linéaire et en donner la matrice H relativement aux bases canoniques.
- Donner, de même, la matrice K de v relativement aux bases canoniques.
- Déterminer le noyau de u . L'application u est-elle injective ? Procéder de même avec v .
- Déterminer l'image de u . L'application u est-elle surjective ? Procéder de même avec v .
- Calculer le produit HK et établir que $(HK)^2 = \lambda I_2$ où l'on déterminera le réel λ .
- Démontrer sans calcul que HK est inversible. Quelles en sont les valeurs propres ?
- Déterminer $(u \circ v)^2$

Exercice 23 (D'après oral HEC -voie E)

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice de représentation dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Démontrer que $2f - f^2 = id_{\mathbb{R}^3}$. L'application f est-elle un projecteur ?
- Justifier que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$. En donner l'automorphisme réciproque.
- Démontrer que la seule valeur propre de f est 1. Décrire l'espace propre associé.
- Démontrer qu'on ne peut trouver de matrice P inversible telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale.
- Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f soit $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Calculer explicitement A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.