

Intégrales Généralisées

Rappels d'intégration de base

Exercice 1 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llllll} 1. \int_{-1}^1 (x^2 - 5) dx & 2. \int_0^1 \frac{x}{2} (1 - x) dx & 3. \int_0^2 \frac{t}{\sqrt{t+1}} dt & 4. \int_0^2 \left(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) dt & 5. \int_0^2 3e^{4x} dx \\ 6. \int_0^2 \frac{3x}{(x^2 + 1)^2} dx & 7. \int_1^2 \frac{t^3}{t^4 + 2} dt & 8. \int_1^3 e^{1-2t} dt & 9. \int_1^2 \left(\frac{x+1}{x^2 + 2x} \right) dx & 10. \int_1^2 u\sqrt{u} du \end{array}$$

Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$1. \int_{-1}^1 e^{3x-2} dx \quad 2. \int_0^a \frac{x}{2} e^{-x^2} dx \quad (a \in \mathbb{R}) \quad 3. \int_0^2 u \sqrt{u^2 + 1} du \quad 4. \int_e^{e^n} \frac{1}{t \ln t} dt \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Exercice 3 Calculer, à l'aide d'intégrations par parties :

$$1. \int_1^t \ln x dx \quad (t > 0) \quad 2. \int_0^1 x^2 e^{-ax} dx \quad (a \in \mathbb{R}) \quad 3. \int_0^2 t \ln(t+1) dt \quad 4. \int_0^x (2t+1) e^{-t} dt \quad (x \in \mathbb{R})$$

Théorème fondamental de l'intégration

Exercice 4 Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 1 de la fonction $f : t \mapsto t^2 \ln t$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 5 Démontrer l'existence et l'unicité de la primitive F s'annulant en 0 de la fonction $f : t \mapsto 2te^{-t/2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

Changement de variables

Exercice 6 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variables :

1. (a) En posant $u = e^x$, calculer : 2. (a) En posant $x = \frac{1}{1+u}$, calculer :

$$\int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x} \qquad \int_0^2 \frac{du}{(1+u)^2 e^{\frac{1}{1+u}}}$$

- (b) En posant $x = \tan(\theta)$, calculer : (b) **Brutal!** En posant $u = \sqrt{e^x - 1}$, calculer :

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{1 + x^2} \qquad \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$$

On pourra retenir que la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ admet pour primitive $x \mapsto \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$, cette fonction étant la réciproque de $\tan$ définie sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$

Exercice 7 La trigo au secours de l'intégration

On (re)définit la fonction $\tan : I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ par la relation $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

1. Justifier que $\tan$ est dérivable sur I et que l'on a $\tan' = 1 + \tan^2$.
2. Etablir que $\tan$ ainsi définie réalise une bijection de I dans $\mathbb{R}$. On note $\arctan$ sa bijection réciproque.
3. En déduire, en fonction de $x \in \mathbb{R}$ une expression de $\int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt$ et en déduire que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{\pi}{2}$$

On retiendra le résultat de cet exercice en termes de primitive de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$

Intégration par récurrence

Exercice 8 Les éléments simples les moins simples On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$:

$$J_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(t^2 + 1)^n} dt$$

1. Déterminer explicitement $J_1(x)$ en fonction de $x > 0$.
2. On pose $u_n(t) = \frac{1}{(t^2 + 1)^n}$ défini pour $t \geq 0$. Exprimer explicitement $u'_n(t)$ en fonction de n et de t .
3. Etablir, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, la relation (*) :

$$J_n(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^n} + 2nJ_n(x) - 2nJ_{n+1}(x)$$

On pourra effectuer une intégration par parties et remarquer que $x^2 = x^2 + 1 - 1$

4. Justifier que $J_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} J_n(x)$ est une valeur réelle strictement positive bien définie.
5. A l'aide de la relation (*), écrire une relation de récurrence liant J_{n+1} et J_n .
6. Donner les valeurs exactes de J_1 , J_2 et J_3 explicitement.

Exercice 9 On définit une suite d'intégrales $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $I_n = \int_1^e (\ln x)^n dx$ avec convention $I_0 = \int_1^e dx$.

1. Calculez I_0 et I_1
2. Pour $x \in]1; e[$ et $n \in \mathbb{N}$, vérifier que $(\ln x)^n - (\ln x)^{n+1} > 0$
3. En déduire les variations puis le signe de la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$
4. Etablir la relation de récurrence $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ pour $n \in \mathbb{N}$
5. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad (n+1)I_n \leq e$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.
6. Quelle est la valeur de $nI_n + I_n + I_{n+1}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$? Calculez alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n$

Intégrales généralisées

Exercice 10 Introduction au concept

On écrit $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ existe dans $\mathbb{R}$. On dira alors que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. Dans le cas contraire, on dira que l'intégrale diverge.

1. Les intégrales suivantes convergent-elles ? Si oui, en donner la valeur.

$$1. \int_0^{+\infty} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad 2. \int_0^{+\infty} t e^{-2t} dt \quad 3. \int_0^{+\infty} \frac{2}{x+2} dx \quad 4. \int_0^{+\infty} \frac{2}{1+\pi t^2} dt$$

2. Démontrer que si f est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$, alors :

$$\text{pour tout } a \in \mathbb{R} \quad \int_a^{+\infty} f(t)e^{-t} dt \text{ converge}$$

3. Etablir un résultat similaire si p est une fonction polynômiale réelle avec l'intégrale $\int_a^{+\infty} p(t)e^{-t} dt$.

4. Déterminer la nature (convergence ou divergence) des intégrales suivantes :

$$1. \int_0^1 x \ln x dx \quad 2. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx \quad 3. \int_0^1 \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad 4. \int_0^{+\infty} \frac{x-3}{x^2+x+1} dx$$

Exercice CV Pour chaque intégrale proposée, déterminer si elle converge ou non.

$$\begin{array}{llll} (1) \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx & (2) \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\ln(1+x)} dx & (3) \int_1^{+\infty} x^x dx & (4) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx \\ (5) \int_0^{+\infty} \frac{x^5}{x^{12}+1} dx & (6) \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx & (7) \int_1^{+\infty} \frac{1}{sh(t)} dt & (8) \int_{-1}^1 \frac{t^2-t}{\sqrt{1-t}} dt \end{array}$$

Exercice 11 Introduction d'une célèbre fonction

La fonction Gamma (notée Γ) est définie au moyen de l'intégrale impropre :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

1. Démontrer que, pour tout $x > 0$, l'intégrale définissant $\Gamma(x)$ converge. Qu'en est-il pour $x \leq 0$?
2. Calculer $\Gamma(1)$.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$ on a $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N} \Gamma(n+1) = n!$.

NB : L'étude ou la connaissance de cette fonction peuvent être des attendus de concours ensD2 -Voir sujet 2014

Exercice 12 • $\Theta^{\#}$ Intégrale de Gauss On définit une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$$

1. Calculer $f(0)$.
2. On admet pour cette question que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que l'on a :

$$f'(x) = \frac{\partial}{\partial x} f(x) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} \frac{e^{-(1+t^2)x}}{1+t^2} dt$$

Calculer ainsi $f'(x)$ pour $x \geq 0$ et indiquer la valeur de $f'(0)$.

3. On pose $g(x) = f(x^2)$.
 - (a) Calculer $g(0)$.
 - (b) Justifier que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a : $g'(x) = -2e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$
4. On définit enfin $h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2$
 - (a) Vérifier que $h(0) = \frac{\pi}{4}$.
 - (b) Démontrer que h est en fait constante sur $\mathbb{R}_+$. (Indication : on pourra prouver que h' nulle)
5. Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.
6. En déduire la convergence et la valeur de l'intégrale de Gauss : $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$
7. Retrouver alors que la fonction φ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

est positive, continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$

Nous verrons au chapitre 2.V que cette fonction définit ainsi une densité de probabilités et fondera une loi de variable aléatoire réelle