

Densités de Probabilités

Exercice 1 Famille de densités simples

Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$ une fonction f par :

$$f_n(x) = \frac{a_n}{x^n \sqrt{x}} \mathbb{1}_{[1; +\infty[}(x)$$

où a_n désigne un réel ne dépendant pas de x .

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}$ pour lequel f est une densité de probabilités.
Déterminer alors la constante a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire si $n = 0$?
2. Soit X_n une variable aléatoire de densité f_n , pour $n \in \mathbb{N}^*$.
 - (a) Pour $n = 2$, démontrer que cette variable aléatoire admet une espérance mais pas de variance.
 - (b) De façon générale, pour $n >$ entier naturel donné, pour quelles valeurs de r la variable aléatoire X_n admet-elle des moments d'ordre r ?
 - (c) Démontrer l'existence puis déterminer la variance de X_n dans le cas où $n \geq 3$.
3. Déterminer explicitement la fonction de répartition F_n correspondant à la loi étudiée, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ puis en tracer la courbe dans le cas où $n = 2$.

Exercice 2 •• A partir de la fonction de répartition

On définit une fonction F sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + 5} \mathbb{1}_{[2; +\infty[}(x)$$

On admet que F est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X .

1. La variable X est-elle à densité ? Si oui, en donner une densité associée.
2. Déterminer $\mathbb{P}[k < X \leq k + 1]$ pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Reprendre les questions précédentes avec $G(x) = (1 - \frac{1}{x}) \mathbb{1}_{[2; +\infty[}(x)$

Exercice 3 Première Loi de Laplace

On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

1. Démontrer que f est une densité de probabilités.
On dira qu'une variable aléatoire X suit la (première) loi de Laplace lorsqu'elle admet f pour densité.
2. Soit X suivant la loi de Laplace. Etablir que X admet une espérance et calculer cette espérance.
3. Etablir que si X suit la loi de Laplace, alors X admet des moments nuls à tout ordre r impair.
4. Justifier que X suivant la loi de Laplace admet pour moments n pairs :

$$\mathbb{E}[X^n] = n!$$

Exercice 4 Loi Logistique Standard

On doit qu'une variable aléatoire réelle Z suit la loi logistique standard lorsque sa fonction de répartition est :

$$F_Z(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}}$$

1. Démontrer qu'une telle variable aléatoire Z est à densité et en donner une densité.
2. Démontrer que l'on peut choisir la densité paire.
3. Justifier que Z admet une espérance puis la déterminer.

4. Décrire une densité de la variable aléatoire $X = 3 - 2Z$

Exercice 5 Loi Γ : d'après EnsD2 Paris-Saclay 2014

On reprend la fonction Γ telle qu'elle a été définie en [2]. On introduit à présent, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n définie par :

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad f_n(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ \frac{e^{-u} u^{n-1}}{\Gamma(n)} & \text{sinon} \end{cases}$$

que l'on pourra aussi réécrire $f_n(u) = \frac{e^{-u} u^{n-1}}{\Gamma(n)} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)$ si besoin, ou par commodité.

1. Vérifier que f_n est la densité de probabilité d'une variable aléatoire X .
2. Soient $\lambda > 0$ et Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ .
Montrer que $\mathbb{P}[Y < n] = \mathbb{P}[X > \lambda]$

Exercice 6 D'après Oral-HEC voie E

Soient k et λ deux réels. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = kte^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

1. Déterminer k en fonction de λ pour que f soit une densité de probabilité.
 X désignera dans la suite une variable aléatoire de densité f .
2. Justifier que X admet une espérance et la calculer.
3. Déterminer une densité de $Y = aX + b$ en fonction de a et de b .
4. Démontrer que X admet des moments d'ordre n que l'on calculera (pour $n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 7 D'après Oral-HEC voie B/L

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et Y la loi uniforme $\mathcal{U}([-1; 1])$ et on note $Z = X Y$

1. Justifier que Z est une variable aléatoire et déterminer $Z(\Omega)$. La variable aléatoire Z est-elle discrète ?
2. Donner $\mathbb{P}[Z = 0]$.
3. Décrire, pour $x \in \mathbb{R}$, l'expression de $F_Z(x)$ (fonction de répartition de Z en x).
4. Z est-elle à densité ?

Exercice 8 D'après HEC 2010

On considère une variable aléatoire T à densité, définie sur un espace probabilisé $(\Omega; \mathcal{A}; \mathbb{P})$ dont la fonction de répartition vérifie :

$$F_T(t) = (1 - e^{-\lambda t})^2 \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \quad (\lambda > 0 \text{ constante})$$

Démontrer que T admet une espérance de $\frac{3}{2\lambda}$ et une variance de $\frac{5}{4\lambda^2}$

Exercice 9 D'après EML 2006

On considère une variable aléatoire U suivant une loi normale centrée mais de variance $\frac{1}{2}$.

Démontrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$ est convergente et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$.

Exercice 10 La loi Bêta

On définit pour tout couple (r, s) de réels strictement positifs le nombre $B(r; s)$ par :

$$B(r; s) = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx$$

1. (a) Vérifier que, pour tout $(r; s) \in]1; +\infty[^2$ l'application $x \mapsto x^{r-1}(1-x)^{s-1}$ est bien de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $]0; 1[$.
En déduire que, sous cette condition, $B(r; s)$ est bien défini.
- (b) Soit $s > 1$. Justifier qu'alors l'intégrale définissant $B(r; s)$ est bien convergente pour tout $r \in]0; 1]$.
- (c) En déduire que $B(r; s)$ est toujours bien défini pour $r > 0$ et $s > 0$.
2. On définit ensuite une fonction f sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{B(r; s)} x^{r-1} (1-x)^{s-1} \mathbb{1}_{]0; 1[}(x)$$

- (a) Vérifier que f est une densité de probabilité pour tous $r > 0$ et $s > 0$.
- (b) Reconnaître la loi associée dans le cas où $r = s = 1$
- (c) Décrire la fonction de répartition F associée à la densité f (pour $(r; s) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ fixé)
On dit qu'une variable aléatoire X admettant une telle densité suit la loi Bêta de paramètres r et s .
3. On se place ici dans le cas où r et s sont entiers naturels non nuls.

(a) Etablir que $\forall (p; q) \in \mathbb{N}^* \quad B(p; q+1) = \frac{q}{p} B(p+1; q)$

(b) Calculer la valeur de $B(p; 1)$ pour $p \in \mathbb{N}^*$

(c) En déduire que :

$$\forall (p; q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \quad \frac{1}{B(p; q)} = p \binom{p+q-1}{p} = q \binom{p+q-1}{q}$$

(d) Démontrer alors qu'une variable aléatoire X suivant une loi Bêta de paramètres p et q admet une espérance.

(e) Vérifier, dans ce cas, que cette espérance vaut $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{p+q}$

Aucune donnée d'annale ne permet d'affirmer que cette étude peut faire l'objet d'un problème au concours ensD2. En revanche, il en était de même pour la loi Γ avant 2014. On peut donc envisager que scénario puisse se produire