Concours Blanc C_2

.

Durée : quatre heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à encadrer dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.
Ils ne doivent faire usage d'aucun document : l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.
Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre

Exercice

Soit E un espace vectoriel (de dimension $n \geq 2$ finie) dont $\mathcal{B} = (e_1 \ ; \ \dots \ ; \ e_n)$ est une base. On pose $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses sous-espaces vectoriels. On note $\sqsubset$ la relation binaire définie sur $\mathcal{H}$ par :

$$A \sqsubset B \quad \Longleftrightarrow \quad A \text{ est un sous-espace vectoriel de } B$$

On rappelle que $\mathcal{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E.

1. Démontrer que $(\mathcal{H}, \sqsubset)$ est un ensemble ordonné. L'ordre est-il total ?
2. Donner les éléments minimal et maximal respectivement de $(\mathcal{H}, \sqsubset)$
3. On écrit $A \simeq B$ entre deux éléments de $\mathcal{H}$, lu A *est isomorphe à* B, lorsqu'il existe $f \in \mathcal{L}(E)$ bijectif vérifiant $f(A) = B$.
   Vérifier que $\simeq$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{H}$ puis donner la classe d'équivalence de vect$(e_1 + \cdots + e_n)$ selon $\simeq$.

Problème I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto x\ln(x) - x$.
On notera $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Etude sommaire de f
   (a) Déterminer $f(1)$, $f(e)$ ainsi que les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (b) Dresser le tableau complet des variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$
   (c) Déterminer une équation de la droite $\mathcal{T}_e$ tangente à $\mathcal{C}$ en $x = e$
   (d) Représenter graphiquement $\mathcal{C}$ et $\mathcal{T}_e$ dans un même repère soigneusement construit.
2. Calculs d'intégrales
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et en donner sa valeur (en fonction de n).
   (b) En considérant les intégrales de la forme $\displaystyle\int_{i-1}^{i} \ln(x)\,\mathrm{d}x$, établir que $n\ln\left(\frac{n}{e}\right) \leq \ln(n!)$.
3. Application aux probabilités
   On considère un entier $n \geq 2$ et $k \in [\![1;n]\!]$
   (a) Etablir que $\binom{n}{k} \leq \frac{n^k}{k!}$ puis en déduire que $\binom{n}{k} \leq \left(\frac{ne}{k}\right)^k$.

   On considère à présent une urne $\mathcal{U}$ contenant exactement n boules l'une exactement d'entre elle étant noire et les autres étant blanches. On note X_n la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où l'on tire la boule noire en procédant à n tirages successifs avec remise.

(b) Justifier que X_n suit une loi $\mathcal{B}(n; p_n)$ où $p_n = \frac{1}{n}$ puis rappeler les valeurs de $\mathbb{P}[X_n = k]$ en fonction de l'entier k ainsi que celles de l'espérance $\mathbb{E}[X_n]$ et de la variance $\mathbb{V}[X]$ associées.

(c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}[X_n = 0]$. Interpréter dans le contexte de l'expérience $\mathcal{E}$

(d) Etablir que, pour tout $j \in [\![3; n]\!]$ on a : $\mathbb{P}[X_n \geq j] \leq \left(\frac{e}{j}\right)^j \dfrac{1}{1 - \frac{e}{j}}$

4. Vers un modèle d'approximation asymptotique

On imagine à présent que le nombre n de boules (et donc aussi de tirages) devient arbitrairement grand et on cherche à déterminer un modèle mathématique permettant de décrire le phénomène obtenu au mieux.

(a) Justifier que, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, on a $\binom{n}{k} \sim \dfrac{n^k}{k!}$ lorsque n tend vers $+\infty$

(b) Déterminer alors, pour $k \in \mathbb{N}$ fixé, la valeur de $q_k = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}[X_n = k]$.

Vous vérifierez la cohérence avec les résultats précédants)

(c) Vérifier que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} q_k$ converge et que $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} q_k = 1$.

(d) On définit enfin une variable aléatoire Z par : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}[Z = k] = q_k$

Reconnaître la loi de Z et en donner son espérance et sa variance.

Problème II

Soit X définie sur un espace probabilisé $(\Omega\ ;\ \mathcal{A}\ ;\ \mathbb{P})$ à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_k = \mathbb{P}[X = k]$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Questions préliminaires

1. Démontrer que la série $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} p_k s^k$ converge pour $s \in [0; 1]$.

   On posera alors, dans la suite, $f(s) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} p_k s^k$ pour $s \in [0; 1]$.

2. Evaluer $f(0)$ et $f(1)$.

Les trois parties qui suivent peuvent être traitées de façon indépendante. Vous pourrez admettre tout résultat de l'une pour répondre aux questions des parties suivantes.

Partie A : propriétés de f

1. Démontrer que f est croissante sur $[0; 1]$
2. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Etablir l'existence d'un entier $K_\varepsilon \geq 1$ tel que l'on ait :

$$\forall s \in [0; 1] \quad \sum_{k=K_\varepsilon}^{+\infty} p_k s^k \leq \varepsilon$$

3. En déduire que f est continue sur $[0; 1]$

On pourra amdettre ces résultats dans les autres parties.

Partie B : Etude d'une suite

On suppose dans cette partie que $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$.
On définit dans cette partie une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par récurrence au moyen de la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = f(u_n)$$

et on posera $u_0 \in [0; 1]$ arbitraire.

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \dfrac{1+u_n}{2}$ sous ces conditions.
2. Justifier que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_n = u_n - 1$ est géométrique.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n et de u_0.
4. On définit une variable aléatoire U_0 sur le même espace que X, de loi $\mathcal{B}(p)$ et on pose :
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = f(U_n)$$
Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire U_n admet une espérance que l'on calculera.
5. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}[V_n]$?

Partie C : En polynôme et en série

Dans cette partie, on fixe un réel r de l'intervalle $]0;1[$ et on pose $p_k = (1-r)r^k$ pour $k \in \mathbb{N}$

1. Vérifier que $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permet bien de définir une loi de probabilité pour X.
2. Calculer $f(s)$ en fonction de r et de s dans ce cas.
3. Factoriser le polynôme $P(x) = 1 - 4x + 4x^2$
4. Déterminer les réels s de l'intervalle $[0;1]$ vérifiant $f(s) = s$
5. Justifier enfin que la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ est convergente. Quelle est alors la limite de cette suite ?

Problème III

L'objectif du problème est d'introduire la notion de matrice stochastique et d'en étudier les propriétés les plus importantes.
Soit $k \geq 1$ entier naturel donné, on dit qu'une matrice $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est stochastique lorsqu'elle vérifie :

- $\forall (i;j) \in [\![1;k]\!]^2 \quad m_{i,j} \geq 0$
- $\forall i \in [\![1;k]\!] \quad \displaystyle\sum_{j=1}^{k} m_{i,j} = 1$

On pourra alors désigner par I la matrice identité de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ et O la matrice nulle de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
La notation $Sp(M)$ désigne le spectre d'une matrice M.
On notera enfin $J \in \mathbb{R}^k$ le vecteur colonne dont tous les coefficients sont des 1, et on pourra assimiler $\mathbb{R}^k$ avec $\mathcal{M}_{k,1}(\mathbb{R})$.

Partie A : en dimension 2

Soient p et q deux réels de l'intervalle $[0;1]$. On considère la matrice $S = \begin{pmatrix} p & q \\ (1-p) & (1-q) \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres de S en fonction de p et de q.
2. La matrice S est-elle diagonalisable ? Justifier.
3. Déterminer l'ensemble $\mathcal{V}$ des réels λ pour lesquels il existe une matrice stochastique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant λ comme valeur propre.

Partie B : premières propriétés générales

1. Démontrer que, pour $S \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ matrice à coefficients tous positifs, on a :
$$S \text{ est stochastique} \iff SJ = J$$
2. Etablir que, si S est stochastique alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a S^n stochastique.
3. Démontrer que, si S est stochastique, alors $Sp(S) \subset [-1;1]$.
Indication : En se donnant U vecteur propre non nul de S, considérer $X = \dfrac{1}{m}U$ où $m = \max\limits_{i\leq k} |u_i|$

Partie C : étude d'espaces propres à vecteur fixé

On fixe dans cette partie un vecteur X de $\mathbb{R}^k$ non nul et on notera E_X l'ensemble défini par :

$$E_X = \{M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \mid \exists \lambda \in Sp(M)\ X \in \ker(M - \lambda I)\}.$$

1. Démontrer que E_X est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.
2. On pose $\varphi_X : \mathcal{M}_k(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^k$ définie par $\varphi_X(A) = AX$.
   Démontrer que φ_X est une application linéaire.
3. Etablir que $\ker(\varphi_X) \cap \text{vect}(I) = \{O\}$.
   Vous donnerez les dimensions respectives des espaces $\ker(\varphi_X)$ et $\text{vect}(I)$
4. Justifier que toute matrice $M \in E_X$ s'écrit comme une unique somme $M = K + \alpha I$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et K vérifiant $KX = 0_k$.
5. Déterminer la dimension de E_X.
6. Vérifier que l'application $Y \mapsto {}^tYX = \sum_{i=1}^{k} y_i x_i$ est linéaire en précisant les espaces vectoriels de départ et d'arrivée.
   On se donne une base $\mathcal{B} = (e_1\ ;\ \ldots\ ;\ e_p)$ du noyau de cette application : identifier p.
7. *Retour aux matrices stochastiques*
   (a) Etablir que, si S est stochastique, alors $S \in E_J$.
   (b) L'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ est-il un espace vectoriel pour les opérations matricielles usuelles ? Justifier.
   (c) Décrire le plus précisément possible E_J lorsque $k = 2$