

Séries et VAR : corrigés

Exercice 3 1. On se propose d'écrire :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}[X_n = k] = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{k}{n^k} \binom{n+1}{k} - \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k} \binom{n+1}{k}$$

puis de calculer séparément chacune des deux sommations. Ainsi :

- On calcule d'une part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k} \binom{n+1}{k} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k - 1 - \frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n} (n+1) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 - \frac{1}{n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

ayant utilisé, par reconnaissance d'une dérivée combinée avec un binôme de Newton :

$$\sum_{k=1}^{n+1} k \binom{n+1}{k} x^{k-1} = \frac{\partial}{\partial x} \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k = (1+n)(1+x)^n$$

- D'autre part :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{n^k} \binom{n+1}{k} &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n^k} \binom{n+1}{k} - (n+1) \times \frac{1}{n} - 1 \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

En assemblant, on obtient :

$$\sum_{k=2}^{n+1} \mathbb{P}[X_n = k] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} + \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1 = 1$$

2. Pour n au voisinage de l'infini, on a $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$, donc :

$$\mathbb{P}[X_n = k] \equiv \frac{k-1}{n^k} \times \frac{n^k}{k!} = \frac{k-1}{k!}$$

le dernier terme ne dépend pas de n donc il s'agit bien de la limite quand n tend vers $+\infty$

3. On décompose le calcul en deux sommes (la convergence ne pose aucun problème par comparaison à une série exponentielle visible) :

D'une part :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1 - 1 = e - 2$$

d'autre part :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - 1$$

Et ainsi, la somme de la série étudiée est $(e - 1) - (e - 2) = 1$. La positivité des valeurs de $\frac{k-1}{k!}$ permet alors bien de définir la VAR notée Z dans l'énoncé.

4. On écrit :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} k \mathbb{P}[Z = k] = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{k-2}{(k-2)!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{k!} = e$$

5. Nous venons en fait d'établir que $\mathbb{E}[Z] = e$.

De plus, on peut vérifier que $\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=0}^{n+1} \mathbb{P}[X_n > k] = 1 + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}[X_n > k]$. Ainsi :

$$\mathbb{E}[X_n] = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^k} \binom{n}{k} = 1 + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - 1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e$$

(limite de référence)

Les valeurs coïncident.

Le lecteur pourra développer la rédaction (notamment sur l'usage de la formule des probabilités totales assurant bien les convergences des séries exploitées)

Exercice 6 1. On calcule $\mathbb{P}[X = k]$ au moyen de la formule des probabilités totales en décomposant sur $([N = n])_{n \in \mathbb{N}}$, système complet d'événements. On va obtenir (la convergence étant acquise) :

$$\mathbb{P}[X = k] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-5} \frac{5^n}{n!} \binom{n}{k} \frac{4^{n-k}}{5^n} = \frac{e^{-5}}{k!} \sum_{n=k}^n \frac{4^n}{n!}$$

ayant $\binom{n}{k} = 0$ pour $k > n$ et avec un glissement d'indices $n := n + k$. On reconnaît la série exponentielle pour écrire :

$$\mathbb{P}[X = k] = \frac{e^{-5}}{k!} e^4 = e^{-1} \frac{1}{k!}$$

caractérisant ainsi la loi $\mathcal{P}(1)$.

2. On réécrit, pour $k \in \mathbb{N}$ donné : $\mathbb{P}[Y = k] = \mathbb{P}[X = N - k]$ et on développe par la formule des probabilités totales (mêmes argumentations) :

$$\mathbb{P}[Y = k] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}[N = n] \times \mathbb{P}_{[N=n]}[X = n - k] = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-5} \frac{5^n}{n!} \binom{n}{n-k} \frac{4^k}{5^n}$$

En utilisant la symétrie du coefficient binomial on écrit :

$$\mathbb{P}[Y = k] = e^{-5} 4^k \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} \frac{1}{n!} = \frac{e^{-5} 4^k}{k!} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$$

soit finalement $\mathbb{P}[Y = k] = e^{-5} \times e^{-1} \times \frac{4^k}{k!} = e^{-4} \frac{4^k}{k!}$, permettant de reconnaître une loi de Poisson de paramètre 4.

3. Les valeurs entières k et j étant fixées on calcule donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[X = k \cap Y = j] &= \mathbb{P}[X = k \cap N - X = j] = \mathbb{P}[N = k + j \cap X = k] \\ &= \mathbb{P}[N = k + j] \times \mathbb{P}_{[N=k+j]}[X = k] = e^{-5} \frac{5^{k+j}}{(k+j)!} \times \binom{k+j}{k} \frac{4^k}{5^{k+j}} \\ &= e^{-5} \frac{1}{(k+j)!} \times \frac{(k+j)!}{k!j!} 4^k = e^{-5} \frac{4^k}{k!j!} \end{aligned}$$

Le calcul direct de $\mathbb{P}[X = k] \times \mathbb{P}[Y = j]$ fournit le même résultat en observant immédiatement que $e^{-1} e^{-4} = e^{-5}$.

Exercice 13 1. On va expliciter la loi de Z en distinguant 6 cas sur la valeur $k \in \mathbb{N}$. Dans chaque étude, on utilise la formule des probabilités totales selon le système complet d'événements $(\mathbb{P}[Y = 1] ; \mathbb{P}[Y = 2] ; \mathbb{P}[Y = 3])$ et on effacera tout cas menant à une probabilité nulle.

On rappelle de plus que, d'après les hypothèses, on a $\mathbb{P}([Y = i] \cap [X = n]) = \mathbb{P}[Y = i]\mathbb{P}[X = n]$ pour tout $(i; n) \in \llbracket 1; 3 \rrbracket \times \mathbb{N}$ et que :

$$\mathbb{P}[Y = i] = \frac{1}{3} \quad \wedge \quad \mathbb{P}[X = n] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

- Cas $k = 6p$: On a $\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[XY = 6p] = \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 6p]) + \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 3p]) + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 2p])$
Ce qui nous conduit à écrire :

$$\mathbb{P}[Z = 6p] = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^{6p}}{(6p)!} + \frac{\lambda^{3p}}{(3p)!} + \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} \right) e^{-\lambda}$$

- Cas $k = 6p + 1$: On a $\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[XY = 6p + 1] = \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 6p + 1])$
Ce qui nous conduit à écrire :

$$\mathbb{P}[Z = 6p + 1] = \frac{1}{3} \frac{\lambda^{6p+1}}{(6p+1)!} e^{-\lambda}$$

- Cas $k = 6p + 2$: On a $\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[XY = 6p + 2] = \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 6p + 2]) + \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 3p + 1])$
Ce qui nous conduit à écrire :

$$\mathbb{P}[Z = 6p + 2] = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^{6p+2}}{(6p+2)!} + \frac{\lambda^{3p+1}}{(3p+1)!} \right) e^{-\lambda}$$

- Cas $k = 6p + 3$: On a $\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[XY = 6p + 3] = \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 6p + 3]) + \mathbb{P}([Y = 3] \cap [X = 2p + 1])$
Ce qui nous conduit à écrire :

$$\mathbb{P}[Z = 6p + 3] = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^{6p+3}}{(6p+3)!} + \frac{\lambda^{2p+1}}{(2p+1)!} \right) e^{-\lambda}$$

- Cas $k = 6p + 4$: On a $\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[XY = 6p + 4] = \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 6p + 4]) + \mathbb{P}([Y = 2] \cap [X = 3p + 2])$
Ce qui nous conduit à écrire :

$$\mathbb{P}[Z = 6p + 4] = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda^{6p+4}}{(6p+4)!} + \frac{\lambda^{3p+2}}{(3p+2)!} \right) e^{-\lambda}$$

- Cas $k = 6p + 5$: On a $\mathbb{P}[Z = k] = \mathbb{P}[XY = 6p + 5] = \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X = 6p + 5])$
Ce qui nous conduit à écrire :

$$\mathbb{P}[Z = 6p + 5] = \frac{1}{3} \frac{\lambda^{6p+5}}{(6p+5)!} e^{-\lambda}$$

Comme X et Y sont indépendantes, on peut calculer $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = 2\lambda$ comme X et Y suivent des lois de référence (dont les espérances sont connues).

De même : $\mathbb{V}[Z] = \mathbb{V}[XY] = \mathbb{E}[X^2Y^2] - \mathbb{E}[XY]^2 = \mathbb{E}[X^2]\mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[X]^2\mathbb{E}[Y]^2$ d'après la formule de Koenig-Huygens et comme X^2 et Y^2 sont indépendantes entre elles. Finalement :

$$\mathbb{V}[Z] = (\lambda^2 + \lambda) \left(4 + \frac{2}{3} \right) - 4\lambda^2 = \frac{2}{3}\lambda^2 + \frac{14}{3}\lambda$$

NB : si l'on ne connaît pas directement les moments quadratiques de lois de référence (c'est admissible), on peut toujours les retrouver en calculant $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{V}[X] + \mathbb{E}[X]^2$ qui utilise des valeurs supposées connues.

2. Il suffit de regrouper les cas qui nous intéressent en utilisant la formule des probabilités totales dans le même cadre qu'en 1° :

$$\mathbb{P}[Z \in 2\mathbb{N}] = \mathbb{P}[Y = 2] + \mathbb{P}([Y = 1] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) + \mathbb{P}([Y = 3] \cap [X \in 2\mathbb{N}]) = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \sum_{p \in \mathbb{N}} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{2p}}{(2p)!} \right) = \frac{2 + e^{-2\lambda}}{3}$$