.

Réduction des matrices : corrigés

Exercice $\boxed{18}$ On donne de façon synthétique les éléments caractéristiques de la diagonalisation de chaque matrice :

	A	B	C
$P_M(X)$	$X^2 - 25$	$(X-1)^2(X+1)$	$X^3 - 4X^2 + 4X$
$Sp(M)$	$\{-5; 5\}$	$\{-1; 1\}$	$\{0; 2\}$
P : passage	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
P^{-1}	$\begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 \\ -0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & -0.5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0.5 & 0 & -0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice $\boxed{20}$ Soit f un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}^n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ donné.

On a alors l'existence d'une base $\mathcal{B} = (u_1 \,;\, \dots \,;\, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$ composée de vecteurs propres de f, puisque les sous-espaces propres de f sont en somme directe pour former $\mathbb{R}^n$.

On considère alors que $\forall i \leq n \; f(u_i) = \lambda_i \cdot u_i$ où λ_i désigne une valeur propre de f dont u_i est un vecteur propre (donc non nul). D'après propriété établie en cours (donc, quitte à la redémontrer en recopiant la démonstration proposée) on a, pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ donné :

$$\forall i \leq n \; P(f)(u_i) = P(\lambda_i) \cdot u_i \quad \Longrightarrow \quad u_i \in E_{P(\lambda_i)}(P(f))$$

Ce qui signifie en particulier que chacun des vecteurs u_i est un vecteur propre de $P(f)$ (mais pas forcément associé à la valeur propre λ_i). On a donc encore $\mathcal{B}$ base de $\mathbb{R}^n$ (parce que c'est un fait) mais aussi formée de vecteurs propres de $P(f)$.

En conclusion, $P(f)$ est donc diagonalisable puisqu'admet une base de vecteurs propres (similaire à f).

Remarque : Attention ! En général, on ne peut pas assimiler les espaces $E_{\lambda_i}(f)$ et $E_{P(\lambda_i)}(P(f))$ tout simplement parce que P n'est en général pas injectif, ce qui permettrait d'avoir, pour $P(f)$, une valeur propre $\mu = P(\lambda_i) = P(\lambda_j)$ unique associée à deux valeurs propres distinctes $\lambda_i \neq \lambda_j$ de f.

C'est le cas en prenant f admettant n valeurs propres distinctes et $P(X) = X^2$ avec n pair et $Sp(f) = \{-n; \dots; -1; 1; \dots; n\}$

Exercice $\boxed{21}$ **Diagonalisabilité des projecteurs en dimension finie** On écrira dans ce corrigé $ab = a \circ b$ par commodité, ceci se justifiant par l'intepprétation matricielle des applications linéaires. De même, le contexte étant démuni d'ambiguités on pourra écrire id au lieu de id_E.

1. $\mathcal{L}(E)$ est un espace vectoriel donc, par stabilités usuelles on a $id - p = id + (-1) \cdot p \in \mathcal{L}(E)$
   De plus, on calcule, id commutant avec tous les éléments de $\mathcal{L}(E)$:

   $$(id-p)^2 = id^2 - 2id \cdot p + p^2 = id - 2p + p = id - p$$

   Ce qui confirme que $id - p$ est bien un projecteur de E.

2. Propriété de cours des projecteurs, mais on peut brièvement rappeler que :

$$\left.\begin{array}{l} x \in Im(p) \;\Rightarrow\; p(x) = x \\ x \in Ker(p) \;\Rightarrow\; p(x) = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow Im(p) \cap Ker(p) = \{x \in E \mid p(x) = x = 0_E\} = \{0_E\}$$

3. On gardera donc à l'esprit que $q^2 = q$
   (a) Le calcul direct donne $(p+q)^2 = p + pq + qp + q = p + q$ d'où l'on tire $pq + qp = O$ (endomorphisme nul). On pourrait dire que le produit pq est anti-commutatif : $pq = -qp$.
   Composons à gauche par p :
   $$p(pq) = p(-qp) \;\Rightarrow\; p^2q = -pqp \;\Rightarrow\; pq = -pqp$$
   Par des procédés similaires de composition à gauche ou à droite par p ou par q on extrait $qp = -pqp$ et $qp = -qpq$ et $pq = -qpq$ ce qui permet d'obtenir $pq = qp$. Finalement :
   $$qp + pqp = O \;\Leftrightarrow\; pq + pq^2 = O \;\Leftrightarrow\; pq + pq = O \;\Leftrightarrow\; 2pq = O \;\Leftrightarrow\; pq = \frac{1}{2} \cdot O = O$$
   D'où le résultat attendu.
   (b) L'inclusion $Im(p+q) \subset Im(p) + Im(q)$ est immédiate et valable pour tous les endomorphismes p et q (sans l'hypothèse *projecteurs*).
   Soit alors, réciproquement, $y \in Im(p) + Im(q)$.
   On se donne alors $x_1 \in Im(p)$ et $x_2 \in Im(q)$ vérifiant $y = p(x_1) + q(x_2)$.
   En composant à gauche par p on obtient $p(y) = p^2(x_1) + pq(x_2) = p(x_1) + 0 = p(x_1)$ car $pq = O$ et de façon analogue avec q composée à gauche on tire $q(y) = q(x_2)$.
   En sommant ces résultats membre à membre, on tire : $(p+q)(y) = p(y) + q(y) = p(x_1) + q(x_2) = y$ ce qui permet d'écrire que $y \in Im(p+q)$
   (c) L'inclusion $ker(p) \cap ker(q) \subset ker(p+q)$ est immédiate et valable pour tous les endomorphismes p et q (sans l'hypothèse *projecteurs*).
   Soit alors, réciproquement, soit $x \in ker(p+q)$ donné. On a par définition $p(x) + q(x) = 0$ donc $p^2(x) + pq(x) = p(x) + 0 = 0$ et ainsi $x \in ker(p)$. Par raisonnement analogue en composant avec q à gauche, on déduit $x \in ker(q)$ et ainsi $x \in\ ker(q) \cap ker(p)$
4. On écrit tout simplement que $id = (id - p) + p$ et on exploite les résultats qui précèdent en posant $q = id - p$ qui est un projecteur d'après 1. vérifiant $p + q$ est projecteur (puisque id est un projecteur trivial).
   Le cours permet d'assurer que 0 et 1 sont les seules valeurs propres de p éventuellement. Notons alors $E_0 = ker(p)$ et $E_1 = ker(q) = ker(id - p)$, éventuellement réduit(s) à $\{0\}$.
   Nous en tirons $E_0 \oplus Im(p) = \mathbb{R}^n = E_1 \oplus Im(id - E)$ d'après 2. et $E_0 \cap E_1 = ker(id) = \{0\}$ par 3.(b) (ou vos connaissances sur les espaces propres en traitant les cas de projecteurs triviaux à part). On arrive à :
   $$Im(p) + Im(id - p) = Im(id) = \mathbb{R}^n \;\;\Rightarrow\;\; rg(p) + rg(id - p) \geq n$$
   Par ailleurs, étudions $Im(p) \cap Im(id - p)$. Si y en est un élément alors $y = p(x_1) = (id - p)(x_2)$ pour de certains $(x_1; x_2) \in E^2$. De nouveau, en composant à gauche par p on en tire $p(y) = p(x_1) = (p - p^2)(x_2) = 0$ et par un processus similaire avec $(id - p)$ on obtient $(id - p)(y) = (id - p)(x_2) = 0$. Finalement, ceci conduit aux inclusions :
   $$(1) Im(p) \cap Im(Id - p) \subset ker(p)(2) Im(p) \cap Im(Id - p) \subset ker(id - p)$$
   qui permettent d'en déduire $Im(p) \cap Im(Id - p) \subset ker(p) \cap ker(id - p) = ker(id) = \{0\}$ et donc :
   $$Im(p) \oplus Im(Id - p) \subset \mathbb{R}^n \;\Rightarrow\; rg(p) + rg(id - p) \leq n$$
   Enfin, $rg(p) + rg(id - p) = n$ permettant de remonter aux calculs des dimensions de $ker(p)$ et $ker(id - p)$ par le théorème du rang qui fourniront :
   $$dim(ker(p)) + dim(ker(id - p)) = n - rg(p) + n - rg(id - p) = 2n - (rg(p) + rg(id - p)) = 2n - n = n$$
   et comme $E_0 \cap E_1 = \{0\}$ on a $E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^n$ permettant de conclure que p est diagonalisable (même si, en toute rigueur, on devrait disctinguer le cas où p admet effectivement 0 <u>et</u> 1 comme valeurs propres du cas où l'une, au moins, ne serait pas valeur propre -mais ceci reviendrait à p est un projecteur trivial)