.

Densités de probabilités : corrigés

Exercice $\boxed{2}$ 1. On peut réécrire :

$$\forall x \geq 2 \quad F(x) = 1 - \frac{9}{x^2+5}$$

ce qui permet d'observer que F est croissante sur $[2; +\infty[$ (dérivation ou variations composées) On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{9}{x^2+5} = 0$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 1$. L'étude sur $]-\infty; 2[$ est évidente : F y est nulle.

Il reste à étudier la continuité en $x = 2$: $\lim\limits_{x\to 2^+} F(x) = \frac{4-4}{4+5} = 0$ et ainsi F est continue en $x = 2$. La continuité sur $]2; +\infty[$ est claire par composition.
Enfin, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en $x = 2$, ce qui suffit à conclure que X est à densité.

Notons alors f_X une densité de X. On choisit $f_X(x) = 0$ pour $x < 2$ puisque F est nulle sur $]-\infty; 2[$ et on calcule :

$$\forall x > 2 \quad F'_X(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} = f_X(x)$$

et on peut choisir la valeur de $f_X(2)$: on prend 0. En conclusion :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_X(x) = \frac{18x}{(x^2+5)^2} \mathbb{1}_{[2;+\infty[}(x)$$

convient commme densité de F.

2. On étudie la quantité $xf_X(x)$ positive (ou nulle) sur $\mathbb{R}$:

$$\forall x > 2 \quad xf_X(x) = \frac{18x^2}{(x^2+5)^2} \equiv \frac{18}{x^2} \quad \text{au voisinage de } +\infty$$

et ainsi, par positivité critère d'équivalence, l'intégrale $\int_2^{+\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument) et comme $xf_X(x) = 0$ pour $x \leq 2$ on a que $\int_{-\infty}^{+\infty} xf_X(x)\,\mathrm{d}x$ converge (absolument) permettabt de conclure que X admet une espérance.

3. Les calculs montrent que G n'est pas continue en $x = 2$ comme $G(2) = \frac{1}{2}$ mais $G(x) = 0$ pour tout $x < 2$. Donc G n'est pas la fonction de répartition d'une VAR à densité.